

Algebra liniowa

prof. dr hab. Andrzej Szczepański

Wydział MFI UG
Instytut Matematyki
(2023/2024)

Wykład 1.

Definicja 1.1

Działanie dwuargumentowe $d : X \times X \rightarrow X$ nazywamy łącznym, o ile:

$$\forall a,b,c \in X \quad d(a, d(b, c)) = d(d(a, b), c).$$

Przykład 1.2

Niech $X = \mathbb{N}$, d – dowolne $+$,

$$\forall u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{N} \quad u_1 + (u_2 + u_3) = (u_1 + u_2) + u_3.$$

Definicja 1.3

(G, e, \circ) nazywamy grupą, o ile:

- $\forall a,b,c \in G \quad (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ - łączność
- $\exists e \in G \quad \forall a \in G \quad e \circ a = a \circ e = a$ - element neutralny
- $\forall a \in G \quad \exists b \in G \quad a \circ b = b \circ a = e$ - element odwrotny

Przykład 1.4

Liczby rzeczywiste \mathbb{R} i wymierne \mathbb{Q} są przykładami grup $(\mathbb{R}, 0, +)$, $(\mathbb{Q}, 0, +)$.

Definicja 1.5

(G, \circ) jest półgrupą, o ile działanie \circ jest łączne.

(Jest półgrupą z jedynką, o ile istnieje element $e \in G$ taki, że $g \circ e = e \circ g = g$).

Np. \mathbb{N} ze względu na mnożenie $(\mathbb{N}, 1, \cdot)$.

Definicja 1.6

Grupa (G, e, \circ) jest abelowa (przemienna), o ile:

$$\forall a, b \in G \quad a \circ b = b \circ a.$$

Definicja 1.7

Pierścieniem $(R, +, \cdot, 0, e)$ nazywamy zbiór R z elementami neutralnymi $0, e \in R$ oraz z działaniami:

- $+$: $R \times R \rightarrow R$
- \cdot : $R \times R \rightarrow R$

spełniający warunki:

- $(R, 0, +)$ jest grupą abelową
- (R, e, \cdot) jest półgrupą.

Ponadto $\forall_{a,b,c \in R} a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
oraz $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$.

Jeżeli mnożenie jest przemienne tzn. $a \cdot b = b \cdot a$, to pierścień R nazywamy przemiennym.

Pierścień nazywamy pierścieniem z jedyneką, jeżeli istnieje element neutralny mnożenia, tzn. $\exists 1 \in R \forall_{a \in R} a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

Przykład 1.8

- $(\mathbb{Z}, 1, 0, \cdot, +)$
- $C[0, 1]$ - pierścień funkcji ciągłych na odcinku $[0, 1]$.
 $\forall_{f, g \in C[0, 1]} (f + g)(x) = f(x) + g(x), (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
 $\forall_x f(x) = 1, \forall_x f(x) = 0$
 $C[0, 1] = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ciągła}\}$

Definicja 1.9

Ciałem nazywamy pierścień przemienny z jedyneką, gdzie $0 \neq 1$ i taki, że $\forall_{x \in R \setminus \{0\}}$ istnieje $x^{-1} \in R \setminus \{0\}$.

Przykład

- \mathbb{R}, \mathbb{Q} ,

- $\{0, 1\}$

$+$	0	1	$*$	0	1
0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1

} tabela modulo

- $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$

$+$	0	1	2	$*$	0	1	2
0	0	1	2	0	0	0	0
1	1	2	0	1	0	1	2
2	2	0	1	2	0	2	1

Jest to ciało.

Przykład c.d.

- $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

*	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

To nie jest ciało, a tylko pierścień (dla elementu 2 nie istnieje element odwrotny).

- $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ z działaniami: dodawanie i mnożenie modulo n .

Jeżeli n -pierwsze, to \mathbb{Z}_n ciało.

Definicja 1.10

Strukturę algebraiczną nazywamy zbiór X z działaniami:

$$k_i : X^{n_i} \rightarrow X, i = 1, 2, \dots, l.$$

Podstrukturą algebraiczną struktury $(X, k_1, k_2, \dots, k_l)$ nazywamy podzbiór $Y \subseteq X$ taki, że:

$$\forall_i k_i : Y^{n_i} \rightarrow Y.$$

Przykład 1.11

$$\mathbb{Z} = \{\mathbb{Z}, 1, 0, \cdot, +\}$$

$2\mathbb{Z}$ nie jest pierścieniem, ale jest podgrupą ze względu na dodawanie.

Uwaga

Strukturę algebraiczną z działaniem $+$ nazywamy strukturą addytywną, natomiast strukturę z działaniem \cdot nazywamy strukturą multiplikatywną.

Uwagi wstępne

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

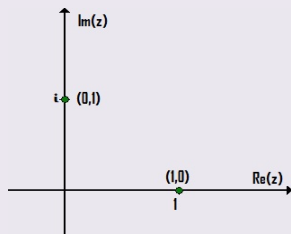
$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

$$i = \sqrt{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i^2 = -1$$



Definicja 2.1

Zbiór $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ wraz z działaniami:

- $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$
- $(a, b) \odot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

nazywamy zbiorem liczb zespolonych. W tym zbiorze równanie $x^2 + 1 = 0$ ma rozwiązanie.

Definicja 2.2

Dowolną liczbę zespoloną $z \in \mathbb{C}$ zapisujemy w postaci

$$z = a + bi,$$

gdzie $a, b \in \mathbb{R}$,

a - część rzeczywista liczby zespolonej z - $\Re(z)$ (lub $Re(z)$)

b - część urojona liczby zespolonej z - $\Im(z)$ (lub $Im(z)$)

Stwierdzenie 2.3

Zbiór liczb zespolonych z działaniami \oplus, \odot jest ciałem.

Dowód

Zauważmy, że:

$$(a, b) + (0, 0) = (a, b) \Rightarrow 0 = (0, 0)$$

$$(a, b) \cdot (1, 0) = (a, b) \Rightarrow 1 = (1, 0)$$

Poza tym:

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -(1, 0),$$

czyli $(0, 1)^2 = -1$. Zauważmy ponadto, że działania w \mathbb{C} są zwykłymi działaniami na wielomianach stopnia jeden ze zmienną i , gdzie $i^2 = -1$.

Zatem wszystkie aksjomaty ciała, poza istnieniem elementu odwrotnego, wynikają wprost z definicji oraz z własności dodawania i mnożenia wielomianów.

Sprawdźmy zatem, czy $\frac{1}{a+bi} \in \mathbb{C}$?

$$\text{Tak, } \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2-b^2i^2} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i \in \mathbb{C}, \quad a^2 + b^2 \neq 0.$$

Definicja 2.4

Sprężeniem liczby zespolonej nazywamy funkcję $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ zdefiniowaną wzorem $\overline{a + bi} = a - bi$.

Własności sprzężenia

- 1 $\forall r \in \mathbb{R} \quad \bar{r} = r$
- 2 $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- 3 $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$
- 4 $\forall z \in \mathbb{C} \quad \overline{\bar{z}} = z$
- 5 $\forall z \in \mathbb{C} \quad z \bar{z} = |z|^2$

Definicja 2.5

Modułem liczby zespolonej $z = a + bi$ nazywamy liczbę rzeczywistą $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Definicja 2.6

Zapis liczby zespolonej $z \neq 0$ w postaci $z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ nazywamy postacią trygonometryczną liczby z . Kąt α (kąt między osią Ox , a prostą łączącą 0 z liczbą z w kierunku przeciwnym do wskazówek zegara) nazywamy argumentem liczby z .

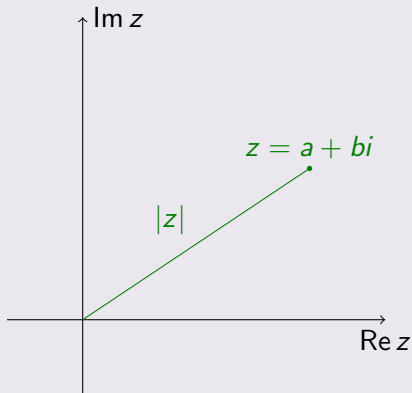
Uwaga

$$\cos \alpha = \frac{a}{|z|} \Rightarrow$$

$$a = |z| \cos \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{b}{|z|} \Rightarrow$$

$$b = |z| \sin \alpha$$



Mnożenie i dzielenie liczb zespolonych

- $z_1 z_2 = |z_1|(\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1) |z_2|(\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2) =$
 $|z_1| |z_2| (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + i \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 +$
 $i \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2) =$
 $|z_1| |z_2| ((\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2) + i(\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 +$
 $\sin \alpha_1 \cos \alpha_2)) = |z_1| |z_2| (\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2))$
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|} (\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha)) = \frac{1}{|z|} (\cos \alpha - i \sin \alpha),$
Rzeczywiście tak jest, bo:
 $z \cdot \frac{1}{z} = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha) \frac{1}{|z|} (\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha)) =$
 $|z| \frac{1}{|z|} (\cos(\alpha - \alpha) + i \sin(\alpha - \alpha)) = \cos 0 + i \sin 0 = 1$
- $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = |z_1|(\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1) \frac{1}{|z_2|} (\cos(-\alpha_2) + i \sin(-\alpha_2)) =$
 $\frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 - \alpha_2))$

Przykłady

$$\bullet i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$

$$|i| = 1$$

$$i^2 = -1$$

$$i^4 = (-1)^2 = 1$$

$$i^4 = (\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})^4 = \cos \frac{4\pi}{2} + i \sin \frac{4\pi}{2} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$$

$$\bullet i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{1}{i} = \frac{1}{|i|} (\cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2}) = -i$$

$$\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$$

$$\bullet i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{1}{i} = \cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2}$$

$$1 = i \cdot \frac{1}{i} = (\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})(\cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2}) =$$

$$= (\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i \sin(-\frac{\pi}{2})) = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}) + i \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}) =$$

$$= \cos 0 + \sin 0 = 1 + 0 = 1$$

Wzór de Moivre'a

Niech $z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$. Wtedy:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad z^n = |z|^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha)$$

Dowód

Dowód indukcyjny.

Dla $n = 1$ oczywiste.

Krok indukcyjny $n \mapsto (n + 1)$.

$$\begin{aligned} (|z|(\cos \alpha + i \sin \alpha))^{n+1} &= (|z|(\cos \alpha + i \sin \alpha))^n \cdot |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha) = \\ &= |z|^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha) \cdot |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha) = \\ &= |z|^{n+1} (\cos(n+1)\alpha + i \sin(n+1)\alpha) \end{aligned}$$

Uwaga

Wzór de Moivre'a prawdziwy jest także dla $n \in \mathbb{Z}$.

Uwaga

$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$
 (S^1, \cdot) jest grupą

Wzór Eulera

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

Dowód: Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ i $f(\alpha) = \cos \alpha + i \sin \alpha$, $f'(\alpha) = if(\alpha)$. Podobnie niech $g(\alpha) = e^{-i\alpha} f(\alpha)$. Wtedy $g'(\alpha) = 0$ i g jest stała. Ponieważ $g(0) = 1$, więc $f(\alpha) = e^{i\alpha} g(\alpha) = e^{i\alpha}$.

Stwierdzenie 2.7

Ciało liczb zespolonych jest algebraicznie domknięte, tzn. dowolny wielomian o współczynnikach w liczbach zespolonych ma pierwiastek.

Przykład

- $ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Jeżeli $\Delta \geq 0$, to istnieje pierwiastek rzeczywisty.

Jeżeli $\Delta < 0$, to rozwiązanie jest zespolone.

$$ax^2 + bx + c = a\left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

Gdy $\Delta < 0$, to $\sqrt{\Delta} = \sqrt{(-1) \cdot \tilde{\Delta}} = i\sqrt{\tilde{\Delta}}$,

gdzie $\tilde{\Delta} > 0$. Zatem:

$$a\left(x - \frac{-b - i\sqrt{\tilde{\Delta}}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b + i\sqrt{\tilde{\Delta}}}{2a}\right).$$

- $x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$
- $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$

Definicja 3.1

Przestrzeń liniowa to struktura $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$, w której $(V, +, 0)$ – grupa abelowa, \mathbb{K} – ciało i, na której określone jest:

$$+ : V \times V \rightarrow V$$

- $\forall a, b, c \in V (a + b) + c = a + (b + c)$ (łączność)
- $\exists 0 \in V \forall a \in V a + 0 = 0 + a = a$ (element neutralny)
- $\forall a \exists b a + b = b + a = 0$ (element odwrotny)
- $\forall a, b \in V a + b = b + a$ (przemienność) $\cdot : \mathbb{K} \times V \rightarrow V$
- $\forall \alpha \in \mathbb{K} \forall a, b \in V \alpha \cdot (a + b) = \alpha \cdot a + \alpha \cdot b$ (rozdzielność)
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \forall a \in V (\alpha + \beta) \cdot a = \alpha \cdot a + \beta \cdot a$ (rozdzielność)
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \forall a \in V \alpha \cdot (\beta \cdot a) = (\alpha \cdot \beta) \cdot a$
- $\forall a \in V 1 \cdot a = a$

Przykład

1 $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$

$$(x, y) + (x_1, y_1) = (x + x_1, y + y_1)$$

$$(x, y) + (0, 0) = (x, y)$$

$$(x, y) + (-x, -y) = (0, 0)$$

2 $(\mathbb{K}, \mathbb{K}, +, \cdot)$ - przestrzeń liniowa nad ciałem \mathbb{K}

3 X - przestrzeń $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$

$$C(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ - funkcja ciągła}\}$$

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

$$(\alpha f(x)) = \alpha f(x)$$

$$\forall_{x \in X} 0f(x) = 0$$

Definicja 3.2

Niech $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem \mathbb{K} i niech $V_1 \subseteq V$. Wówczas V_1 nazywamy podprzestrzenią liniową, o ile $(V_1, \mathbb{K} +_{V_1}, \cdot_{V_1})$ jest przestrzenią liniową.

$$+_{V_1} : V_1 \times V_1 \rightarrow V_1$$

$$\forall a, b \in V_1 \quad a + b \in V_1$$

$$\cdot_{V_1} : \mathbb{K} \times V_1 \rightarrow V_1$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{K} \forall a \in V_1 \quad \alpha \cdot a \in V_1$$

Powyższe dwa warunki można zastąpić jednym:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \forall a, b \in V_1 \quad \alpha a + \beta b \in V_1$$

Przykład

$$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$$

\mathbb{R} - podprzestrzeń liniowa

$$(0, x) + (0, y) = (0, x + y)$$

Kontrprzykład

$$\mathbb{R}^{\geq 0} \subseteq \mathbb{R}$$

$\mathbb{R}^{\geq 0}$ nie jest podprzestrzenią liniową, bo nie jest grupą ze względu na dodawanie.

Definicja 3.3

- 1 Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem \mathbb{K} . Niech $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$. Mówimy, że v_1, v_2, \dots, v_n są liniowo niezależne, kiedy kombinacja liniowa $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$ jest możliwa jedynie, gdy $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.
- 2 Mówimy, że v_1, v_2, \dots, v_n są liniowo zależne, o ile istnieją skalary $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ nie wszystkie równe 0, że $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$

Przykłady

- Układ v_1, v_2, \dots, v_n , taki, że $\exists_{1 \leq i \leq n} v_i = 0$ jest zawsze liniowo zależny.
- $\{(1, 0), (0, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$ jest liniowo niezależny.
 $\alpha_1(1, 0) + \alpha_2(0, 1) = (\alpha_1, 0) + (0, \alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2) = (0, 0) \iff \alpha_1 = \alpha_2 = 0$
- $\{(1, 0), (5, 0)\} \subset \mathbb{R}^2$ jest liniowo zależny
Niech $\alpha_1 = -5, \alpha_2 = 1$ $-5(1, 0) + 1(5, 0) = (-5, 0) + (5, 0) = (0, 0)$

Definicja 3.4

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem \mathbb{K} . Układ wektorów $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ stanowi zbiór generatorów, o ile:

$$\forall v \in V \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} \quad v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

Definicja 3.5

Liniowo niezależny zbiór generatorów przestrzeni liniowej V nazywamy bazą.

Stwierdzenie 3.6

Zapis dowolnego elementu $v \in V$ jako kombinacji liniowej wektorów bazowych jest jednoznaczny.

Dowód

Niech v_1, v_2, \dots, v_n - baza $\Rightarrow \exists_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}} v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$.

Jednoznaczność oznacza, że istnieje tylko jeden wybór $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Przypuśćmy, że istnieją $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, takie że

$$v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n.$$

Ale

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n.$$

$$\text{Stąd: } 0 = (\alpha_1 - \beta_1)v_1 + (\alpha_2 - \beta_2)v_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)v_n.$$

Ponieważ v_1, v_2, \dots, v_n są liniowo niezależne, zatem powyższe równanie jest możliwe tylko gdy $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_n = \beta_n$.

Stwierdzenie 3.7

Następujące warunki są równoważne:

- 1 Zbiór v_1, v_2, \dots, v_n jest bazą przestrzeni liniowej V nad ciałem K .
- 2 Zbiór v_1, v_2, \dots, v_n jest maksymalnym zbiorem wektorów liniowo niezależnych (tzn., że jeśli do wektorów v_1, v_2, \dots, v_n dodamy inny wektor, to układ ten jest wtedy liniowo zależny).

Dowód

(1) \Rightarrow (2) Przypuśćmy, że istnieje $v \neq 0$, gdzie $v \neq v_1, v_2, \dots, v_n$, taki, że układ v_1, v_2, \dots, v_n, v jest liniowo niezależny.

Ale:

$$\begin{aligned}\exists_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} v &= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \\ \Rightarrow 0 &= -1 \cdot v + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n,\end{aligned}$$

co jest sprzeczne z założeniem, że układ v_1, v_2, \dots, v_n, v jest liniowo niezależny.

Dowód c.d.

(2) \Rightarrow (1) Musimy udowodnić, że v_1, v_2, \dots, v_n jest zbiorem generatorów takim, że:

$$\forall v \in V \neq 0, v \neq v_1, \dots, v_n \quad v_1, v_2, \dots, v_n, v$$

jest liniowo zależny.

Stąd:

$$\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1} \quad \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n + \alpha_{n+1} v = 0$$

i nie wszystkie są równe zero.

Jeżeli $\alpha_{n+1} = 0$, to z liniowej niezależności v_1, v_2, \dots, v_n mamy, że $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. Stąd: $\alpha_{n+1} \neq 0$. Zatem:

$$v = -\frac{\alpha_1}{\alpha_{n+1}} v_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_{n+1}} v_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} v_n.$$

Uwaga

Niech V – przestrzeń liniowa nad ciałem \mathbb{K} (u nas to $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$)
i niech $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ baza. Wówczas:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \in V$$

i wszystkie tego typu kombinacje liniowe wektorów bazowych rozpinają przestrzeń liniową generowaną przez v_1, v_2, \dots, v_n .

Przykład

- $v \in \mathbb{R}^3$ dowolny,
Podprzestrzeń rozpięta na v to $\alpha v, \alpha \in \mathbb{K}$, czyli prosta.
- \mathbb{R}^3
 $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ - płaszczyzna przechodząca przez 0 rozpięta na trzech punktach $0, v_1, v_2$

Wykład 4.

Twierdzenie 4.1

Dowolne dwie bazy przestrzeni liniowej V nad ciałem \mathbb{K} są równoliczne.

Dowód

Zacznijmy od sformułowania lematu:

Lemat 4.2

Niech wektory a_1, a_2, \dots, a_n tworzą bazę przestrzeni V i niech $a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n$, przy czym $\alpha_j \neq 0$. Wówczas wektory $a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, a, a_{j+1}, \dots, a_n$ też tworzą bazę przestrzeni V .

Dowód lematu

Wiemy, że $a = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$.

Ponieważ $\alpha_j \neq 0$, więc:

$$a_j \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{\alpha_j} a - \frac{\alpha_1}{\alpha_j} a_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_j} a_2 - \dots - \frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_j} a_{j-1} - \frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j} a_{j+1} - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_j} a_n$$

Widzimy, że a_j jest kombinacją liniową wektorów

$a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, a, a_{j+1}, \dots, a_n$. Każdy wektor z V jest kombinacją liniową

wektorów $a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, a, a_{j+1}, \dots, a_n$, bo każdy wektor z V jest

kombinacją liniową $a_1, a_2, \dots, a_j, \dots, a_n$ (to jest baza),

czyli równość opisana (*) pozwala nam zastąpić a_j i w konsekwencji

zapisać każdy wektor jako kombinację liniową wektorów

$a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, a, a_{j+1}, \dots, a_n$.

Innymi słowy, wektory $a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, a, a_{j+1}, \dots, a_n$ również generują V .

Pozostało pokazać, że te wektory są liniowo niezależne. Niech:

$$\beta a + \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_{j-1} a_{j-1} + \beta_{j+1} a_{j+1} + \dots + \beta_n a_n = 0, \quad \beta_i \in \mathbb{K}$$

Dowód lematu c.d.

Podstawiając za a sumę: $\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$ mamy:

$$\beta \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i \right) + \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_{j-1} a_{j-1} + \beta_{j+1} a_{j+1} + \dots + \beta_n a_n = 0$$

$$\beta (\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{j-1} a_{j-1} + \alpha_j a_j + \alpha_{j+1} a_{j+1} + \dots + \alpha_n a_n) + \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_{j-1} a_{j-1} + \beta_{j+1} a_{j+1} + \beta_n a_n = 0$$

Ponieważ (a_1, a_2, \dots, a_n) – baza, więc $\beta \alpha_j = 0$,

i wiemy z założenia, że $\alpha_j \neq 0$, zatem $\beta = 0 \Rightarrow \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0$.

Twierdzenie 4.3 (Steinitza o wymianie)

Jeśli wektory a_1, a_2, \dots, a_n tworzą bazę przestrzeni V , a wektory b_1, b_2, \dots, b_s są liniowo niezależne, to:

- 1 $s \leq n$
- 2 istnieje $(n - s)$ wektorów a_i , które łącznie z wektorami b_j tworzą bazę przestrzeni V .

Dowód (indukcyjny)

Dla $s = 0$ oczywiste, bo $0 \leq n$.

Założmy, że twierdzenie to jest prawdziwe dla liczb mniejszych od s i dowodzimy względem s .

Rozpatrzmy s wektorów liniowo niezależnych b_1, b_2, \dots, b_s .

Wektory b_1, b_2, \dots, b_{s-1} są liniowo niezależne.

Oznacza to, że $s - 1 \leq n$ oraz istnieje $n - s + 1$ wektorów spośród wektorów a_i , które łącznie z wektorami b_1, b_2, \dots, b_{s-1} tworzą bazę V .

Dla uproszczenia zapisu przyjmijmy, że tymi wektorami są $a_1, a_2, \dots, a_{n-s+1}$. Wykażemy najpierw, że $s - 1 < n$. Gdyby było inaczej, oznaczałoby to, że $s - 1 = n$ (bo $s - 1 \leq n$). A zatem już wektory b_1, b_2, \dots, b_{s-1} tworzyłyby bazę przestrzeni V . Stąd b_s byłby liniowo zależny od b_1, b_2, \dots, b_{s-1} , co daje sprzeczność. Zatem:

$$s - 1 < n \Rightarrow s \leq n,$$

co dowodzi części pierwszej.

Z założenia wektory $b_1, \dots, b_{s-1}, a_1, \dots, a_{n-s+1}$ są bazą V .

Dowód c.d.

Stąd b_s jako wektor z V jest ich kombinacją liniową:

$$b_s = \gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_{s-1} b_{s-1} + \gamma_s a_1 + \dots + \gamma_n a_{n-s+1}.$$

Ponieważ b_1, \dots, b_{s-1}, b_s liniowo niezależne, to co najmniej jeden ze współczynników przy $a_1, a_2, \dots, a_{n-s+1}$ musi być różny od zera.

Przyjmujemy, że jest to np. γ_n tzn. $\neq 0$.

Z lematu możemy utworzyć nową bazę pomijając wektor a_{n-s+1} i wstawiając w jego miejsce b_s . Stąd $b_1, \dots, b_s, a_1, \dots, a_{n-s}$ jest szukaną bazą spełniającą twierdzenie Steinitza.

Definicja 4.4

Liczbę elementów dowolnej skończonej bazy przestrzeni liniowej V nad ciałem \mathbb{K} nazywamy wymiarem przestrzeni V i oznaczamy przez $\dim_{\mathbb{K}} V$.

Jeżeli V nie ma skończonej bazy, to mówimy, że $\dim_k V = \infty$.

Jeżeli $V = \{0\}$ to mówimy, że $\dim_k V = 0$.

Przykład

- $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$ – baza
 $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2$
- $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$
Liczba zespolona jest tu kombinacją liniową 1 oraz i nad \mathbb{R} .
- $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$
Liczba zespolona jest tu kombinacją liniową 1 nad \mathbb{C} .
- $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$
- $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$
- $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R} = 1$
 $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K} = 1$ - bazę \mathbb{K} nad \mathbb{K} tworzy dowolny $\neq 0$ element z \mathbb{K} .

Przykłady

- $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$

$$e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$$

...

$$e_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$$

Jest to baza standardowa, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$.

Analogicznie taką samą bazę mamy nad ciałem \mathbb{K} na \mathbb{K}^n . Stąd $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$.

- $C(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ – funkcja ciągła}\}$

$$(f_1 \circ f_2)(x) = f_1(x) \circ f_2(x), x \in X$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), x \in X$$

Przestrzeń liniowa nad \mathbb{R}

$$\dim_{\mathbb{R}} C(X) = \infty$$

Stwierdzenie 5.1

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$$

Dowód

Przypuśćmy, że $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = n$. Wówczas istniałaby taka baza $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}$, że każda liczba z \mathbb{R} jest zapisywalna w postaci $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$, gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Q}$. A to z definicji liczb rzeczywistych jest niemożliwe.

Przykłady

- $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$, baza: $1 = e_1 = (1, 0), i = e_2 = (0, 1)$
- $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2$
Każda liczba zespolona jest kombinacją liniową nad \mathbb{R} dwóch liczb zespolonych. Ponieważ $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2$, więc dowolne dwa liniowo niezależne wektory stanowią bazę \mathbb{R}^2 nad \mathbb{R} .
- $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \infty$

Definicja 5.2

Niech V_1, V_2 przestrzenie liniowe nad ciałem \mathbb{R} . Funkcja $f : V_1 \rightarrow V_2$ jest homomorfizmem liniowym, o ile spełnia warunki:

- 1 $\forall_{x_1, x_2 \in V_1} f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$
- 2 $\forall_{x \in V_1} \forall_{\alpha \in \mathbb{R}} f(\alpha x) = \alpha f(x)$

Przykłady

$$f : V_1 \rightarrow V_2$$

- $\forall_{x \in V_1} f(x) = 0$ - jest odwzorowaniem liniowym
- $V_1 = V_2$
 $f(x) = x$ - jest odwzorowaniem liniowym

Definicja 5.3

Niech V_1, V_2 przestrzenie liniowe nad \mathbb{R} . Produktem kartezjańskim przestrzeni V_1, V_2 nazywamy przestrzeń

$V_1 \times V_2 = \{(v_1, v_2) \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$ z działaniami:

- $\forall_{x_1, x_2 \in V_1} \forall_{y_1, y_2 \in V_2} (x_1, x_2) + (y_1, y_2) \stackrel{\text{df}}{=} (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$
- $\forall_{\alpha \in \mathbb{R}} \alpha(x_1, x_2) \stackrel{\text{df}}{=} (\alpha x_1, \alpha x_2)$

Przykład

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$$

...

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$$

$$\Pi_1 : V_1 \times V_2 \rightarrow V_1$$

$(x, y) \rightarrow x$ – homomorfizm liniowy - rzutowanie na pierwszą składową

$$\Pi_2 : V_1 \times V_2 \rightarrow V_2$$

$(x, y) \rightarrow y$ – homomorfizm liniowy - rzutowanie na drugą składową.

Stwierdzenie 5.4

Następujące warunki są równoważne:

- 1 $f : V_1 \rightarrow V_2$ jest liniowe
- 2 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \forall x_1, x_2 \in V_1 \quad f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$

Dowód

(1) \Rightarrow (2)

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) \stackrel{1)}{=} f(\alpha x_1) + f(\beta x_2) \stackrel{2)}{=} \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$$

(2) \Rightarrow (1)

- 1 $\alpha = \beta = 1,$
- 2 $\beta = 0$

Obserwacja

$f : V_1 \rightarrow V_2$ homomorfizm liniowy

$$f(x - x) = f(x) - f(x) = f(0) = 0$$

Definicja 5.5

Izomorfizmem liniowym przestrzeni V_1, V_2 nad ciałem \mathbb{R} nazywamy homomorfizm liniowy, który jest różnowartościowy i "na".

Definicja 5.6

Niech $f : V_1 \rightarrow V_2$ homomorfizm liniowy. Wtedy:

- $\ker f = \{x \in V_1 \mid f(x) = 0\}$ nazywamy jądrem f ;
- $\operatorname{im} f = \{y \in V_2 \mid \exists_{x \in V_1} f(x) = y\}$ nazywamy obrazem f .

Stwierzenie 5.7

$\ker f$ i $\operatorname{im} f$ są podprzestrzzeniami liniowymi odpowiednio V_1, V_2 .

Dowód

Korzystamy z def. 3.2 podprzestrzeni liniowej:

V_1 podprzestrzeń liniowa przestrzeni liniowej V

$$\iff \forall_{x,y \in V_1} \forall_{\alpha, \beta \in \mathbb{K}} \alpha x + \beta y \in V_1$$

$$\ker f \subset V_1$$

$$0 \in \ker f$$

$$\forall_{\alpha, \beta} \forall_{x, y \in \ker f} \alpha x + \beta y \in \ker f$$

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = \alpha 0 + \beta 0 = 0 + 0 = 0.$$

$$\operatorname{im} f \subset V_2$$

$$\forall_{\alpha, \beta} \forall_{x, y \in \operatorname{im} f} \alpha x + \beta y \in \operatorname{im} f$$

$$\left. \begin{array}{l} x \in \operatorname{im} f \iff \exists_{x_1 \in V_1} f(x_1) = x \\ y \in \operatorname{im} f \iff \exists_{y_1 \in V_1} f(y_1) = y \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha x + \beta y = \\ = \alpha f(x_1) + \beta f(y_1) = f(\alpha x_1 + \beta y_1) \Rightarrow \alpha x + \beta y \in \operatorname{im} f$$

Wniosek

Zawierania $\ker f \subset V_1$ i $\operatorname{im} f \subset V_2$ są homomorfizmami przestrzeni liniowych.

Definicja 5.8

Bycie podprzestrzenią jest tym samym co stwierdzenie, że inkluzja $V \subset W$ jest homomorfizmem liniowym.

Stwierdzenie 5.9

$f : V_1 \rightarrow V_2$ jest homomorfizmem liniowym różnowartościowym
 $\iff \ker f = 0$.

Dowód.

" \Rightarrow " $\forall_{x,y \in V_1} f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

$0 \neq x \in \ker f$

$0 = f(x) = f(0) \Rightarrow x = 0$.

" \Leftarrow " Niech $\ker f = 0$. Mamy udowodnić, że

$\forall_{x,y \in V_1} f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

Istotnie, z definicji $f(x - y) = f(x) - f(y) = 0$. Stąd $(x - y) \in \ker f$ i $x - y = 0$. Zatem $x = y$.

Definicja 6.1

Macierzą (prostokątną) wymiaru $n \times m$ nazywamy tablicę elementów ciała \mathbb{K} o n - wierszach i m - kolumnach. Zapisujemy ją jako: $[\alpha_{ij}]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ dla każdego $\alpha_{ij} \in \mathbb{K}$.

Przykłady

$$\begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 & 1 \\ 2 & 5 & 7 & 6 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Definicja 6.2

Niech: V – przestrzeń liniowa wymiaru m , W – przestrzeń liniowa wymiaru n , e_1, e_2, \dots, e_m – baza przestrzeni V , f_1, f_2, \dots, f_n – baza przestrzeni W

Niech $h : V \rightarrow W$ homomorfizm przestrzeni liniowych.

$$h(e_1) = \alpha_{11}f_1 + \alpha_{21}f_2 + \dots + \alpha_{n1}f_n$$

$$h(e_2) = \alpha_{12}f_1 + \alpha_{22}f_2 + \dots + \alpha_{n2}f_n$$

...

$$h(e_m) = \alpha_{1m}f_1 + \alpha_{2m}f_2 + \dots + \alpha_{nm}f_n$$

$$\text{Wówczas macierz } [h(e_1), h(e_2), \dots, h(e_m)] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nm} \end{bmatrix}$$

nazywamy macierzą homomorfizmu h .

Przykłady

- $[a]$, $a \in \mathbb{R}$ (1 wiersz, 1 kolumna), $n = 1$, $m = 1$

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \in \mathbb{R}$ – baza \mathbb{R} nad \mathbb{R}

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} f(x) = ax$$

$$f(1) = a$$

$$f(x) = f(x \cdot 1) = xf(1) = xa = ax$$

- $\underbrace{[1 \ 1 \ 1 \ 1]} \iff h : V \rightarrow W$

(1 wiersz, 4 kolumny), $n = 1$, $m = 4$

$\dim V = 4 \iff (e_1, e_2, e_3, e_4)$, $\dim W = 1 \iff (f_1)$

$$h(e_1) = f_1, h(e_2) = f_1, h(e_3) = f_1, h(e_4) = f_1$$

$$\forall_{x \in V} x = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 + \delta e_4$$

$$h(x) = h(\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 + \delta e_4) =$$

$$= \alpha h(e_1) + \beta h(e_2) + \gamma h(e_3) + \delta h(e_4) =$$

$$= \alpha f_1 + \beta f_1 + \gamma f_1 + \delta f_1 = (\alpha + \beta + \gamma + \delta) f_1$$

Przykłady c.d.

$$\bullet \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix} \longleftrightarrow h : V \rightarrow W$$

$$\dim V = 3 \longleftrightarrow (e_1, e_2, e_3)$$

$$\dim W = 2 \longleftrightarrow (f_1, f_2)$$

$$h(e_1) = 1f_1 + 0f_2 = f_1$$

$$h(e_2) = 2f_1 + 5f_2$$

$$h(e_3) = 3f_1 + 6f_2$$

Uwaga

Homomorfizm przestrzeni liniowych zapisany w postaci macierzy to homomorfizm "zakodowany" w postaci macierzy. Bez znajomości baz, w których jest on zakodowany, nie jesteśmy w stanie go "odkodować".

Zatem odpowiedniość:

$$\{\text{Macierze}\} \longleftrightarrow \{\text{homomorfizmy}\}$$

jest związana z odpowiednimi bazami.

Mnożenie macierzy \iff superpozycja (składanie) homomorfizmów

Niech $g : V \rightarrow W, h : W \rightarrow U$. Bazami przestrzeni V, W, U niech będą $(e_1, \dots, e_m), (f_1, \dots, f_n), (u_1, \dots, u_k)$ odpowiednio. Macierzą

homomorfizmu g niech będzie: $A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nm} \end{bmatrix}$, zaś

macierzą homomorfizmu h macierz: $B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \beta_{k1} & \beta_{k2} & \dots & \beta_{kn} \end{bmatrix}$.

Mnożenie macierzy \iff superpozycja (składanie) homomorfizmów

$$V \xrightarrow{g} W \xrightarrow{h} U$$

$$\begin{aligned} h(g(e_i)) &= h(\alpha_{1i}f_1 + \alpha_{2i}f_2 + \dots + \alpha_{ni}f_n) = \\ &= \alpha_{1i}h(f_1) + \alpha_{2i}h(f_2) + \dots + \alpha_{ni}h(f_n) = \\ &= \alpha_{1i}(\beta_{11}u_1 + \beta_{21}u_2 + \dots + \beta_{k1}u_k) + \\ &+ \alpha_{2i}(\beta_{12}u_1 + \beta_{22}u_2 + \dots + \beta_{k2}u_k) + \dots + \\ &+ \alpha_{ni}(\beta_{1n}u_1 + \beta_{2n}u_2 + \dots + \beta_{kn}u_k) = \\ &= (\alpha_{1i}\beta_{11} + \alpha_{2i}\beta_{12} + \dots + \alpha_{ni}\beta_{1n})u_1 + \\ &+ (\alpha_{1i}\beta_{21} + \alpha_{2i}\beta_{22} + \dots + \alpha_{ni}\beta_{2n})u_2 + \dots + \\ &+ (\alpha_{1i}\beta_{k1} + \alpha_{2i}\beta_{k2} + \dots + \alpha_{ni}\beta_{kn})u_k \end{aligned}$$

Zatem:

$$\left[\begin{array}{l} \sum_{j=1}^n \alpha_{ji}\beta_{1j} = \sum_{j=1}^n \beta_{1j}\alpha_{ji} \\ \sum_{j=1}^n \alpha_{ji}\beta_{2j} = \sum_{j=1}^n \beta_{2j}\alpha_{ji} \\ \dots \\ \sum_{j=1}^n \alpha_{ji}\beta_{kj} = \sum_{j=1}^n \beta_{kj}\alpha_{ji} \end{array} \right]$$

– i – ta kolumna w
macierzy
odwzorowania $h \circ g$

Mnożenie macierzy \leftrightarrow superpozycja (składanie) homomorfizmów

Z drugiej strony:

$$B \times A = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \beta_{k1} & \beta_{k2} & \dots & \beta_{kn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nm} \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n \beta_{1j} \alpha_{j1} & \sum_{j=1}^n \beta_{1j} \alpha_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^n \beta_{1j} \alpha_{jm} \\ \sum_{j=1}^n \beta_{2j} \alpha_{j1} & \sum_{j=1}^n \beta_{2j} \alpha_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^n \beta_{2j} \alpha_{jm} \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ \sum_{j=1}^n \beta_{kj} \alpha_{j1} & \sum_{j=1}^n \beta_{kj} \alpha_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^n \beta_{kj} \alpha_{jm} \end{bmatrix}.$$

Mnożenie macierzy \iff superpozycja (składanie) homomorfizmów

Czyli i -ty wiersz $[\beta_{i1}, \beta_{i2}, \dots, \beta_{in}]$ macierzy B mnożymy przez k -tą

kolumnę $\begin{bmatrix} \alpha_{1k} \\ \alpha_{2k} \\ \vdots \\ \alpha_{nk} \end{bmatrix}$ macierzy A i dostajemy element na miejscu (i, k)

macierzy BA , czyli $\sum_{j=1}^n \beta_{ij} \alpha_{jk}$.

Uwaga

- 1 Macierze B i A można mnożyć \iff ilość kolumn macierzy B jest równa ilości wierszy macierzy A .
- 2 Macierze kwadratowe tego samego wymiaru zawsze można mnożyć.

Definicja 6.3

Niech V, W, U – przestrzenie liniowe, zaś

$A = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}, B = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}, C = \{g_1, g_2, \dots, g_k\}$ bazy

przestrzeni V, W, U odpowiednio. Określmy: $V \xrightarrow{\varphi} W \xrightarrow{\psi} U$. Niech

$\varphi(e_i) = a_{1i}f_1 + a_{2i}f_2 + \dots + a_{ni}f_n$, natomiast

$$M_B^A(\varphi) = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \sim \varphi \sim (n \times m). \text{ Podobnie:}$$

$\psi(f_i) = b_{1i}g_1 + b_{2i}g_2 + \dots + b_{ki}g_k$

$${}_i M_C^B(\psi) = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1i} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2i} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{k1} & \dots & b_{ki} & \dots & b_{kn} \end{bmatrix} \sim \psi \sim (k \times n).$$

Wtedy $\psi \circ \varphi \sim M_C^B M_B^A \sim (k \times m)$

Uwaga

Niech A, B, C będą macierzami kwadratowymi $n \times n$. Możemy wtedy wykonywać następujące działania:

- 1 $A + B = B + A$ przemienność dodawania
- 2 $(A + B) + C = A + (B + C)$ łączność dodawania
- 3 $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ łączność mnożenia
- 4 $A(B + C) = AB + AC$
 $(B + C)A = BA + CA$ rozdzielność dodawania względem mnożenia (i odwrotnie)
- 5 $\alpha(B + C) = \alpha B + \alpha C$ mnożenie przez skalary

Przykład

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 9 & 9 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$$

Mnożenie macierzy nie jest przemienne!

Definicja 7.1

Macierzą jednostkową $E_n(I_n)$ $[a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}$ wymiaru n nazywamy macierz

przyjmującą:
$$\begin{cases} 0 & \text{gdy } i \neq j \\ 1 & \text{gdy } i = j \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Stwierdzenie 7.2

Dla każdej macierzy kwadratowej $A_{(n \times n)}$

$$AI_n = I_n A = A$$

Stwierdzenie 7.3

Niech $\varphi : V \rightarrow W$, $B_V = (v_1, \dots, v_n)$, $B_W = (w_1, \dots, w_m)$ bazy V , W odpowiednio, $M_W^V(\varphi)$ macierz odwzorowania. Jeśli $x = (x_1, \dots, x_n)_{B_V}$, to współrzędne $\varphi(x)$ w bazie B_W są równe:

$$[\varphi(x)]_{B_W} = M_W^V(\varphi) \cdot x = M_W^V(\varphi) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Dowód

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^m a_{ji} w_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ji} x_i w_j = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i\right) w_j = \\ &= \left(\sum_{i=1}^n a_{1i} x_i\right) w_1 + \left(\sum_{i=1}^n a_{2i} x_i\right) w_2 + \dots + \left(\sum_{i=1}^n a_{mi} x_i\right) w_m = M_W^V(\varphi) \cdot x,\end{aligned}$$

tzn.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mi} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n x_j a_{1j} \\ \sum_{j=1}^n x_j a_{2j} \\ \dots \\ \sum_{j=1}^n x_j a_{mj} \end{bmatrix}$$

Definicja 7.4

Przekształceniem identycznościowym nazywamy

$$id : V \rightarrow V, \forall v \in V \quad id(v) = v$$

Definicja 7.5

Niech A i A' bazy przestrzeni V . Wtedy macierz $M_{A'}^A(id)$ nazywamy macierzą przejścia od bazy A do bazy A' lub macierzą zmiany bazy z A do A' i oznaczamy przez $P_{A'}^A$.

Kolejne kolumny tej macierzy to współrzędne kolejnych wektorów bazy A w bazie A' .

$$A = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}, A' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_m\}$$

$$\varphi = id$$

$$\varphi(e_i) = id(e_i) = p_{1i}e'_1 + \dots + p_{mi}e'_m$$

Definicja 7.5 c.d.

$$P_{A'}^A = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

Macierz przejścia z bazy A do bazy A' jest zatem macierzą przekształcenia identycznościowego $id(x) = x$ w bazach A i A' .

Uwaga

Niech $P_{A'}^A$ macierz przejścia od bazy A do bazy A' . Wtedy $P_{A'}^A$ jest odwracalna i macierz $(P_{A'}^A)^{-1} = P_A^{A'}$ jest macierzą przejścia od bazy A' do bazy A .

Definicja 7.6

Niech $M_B^A(\varphi)$ będzie macierzą przekształcenia liniowego $\varphi : V \rightarrow W$ w bazach A, B przestrzeni V, W odpowiednio. Macierz przekształcenia liniowego φ w bazie A', B' ma postać:

$$M_{B'}^{A'}(\varphi) = P_{B'}^B M_B^A(\varphi) P_A^{A'}$$

Przykład

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\varphi(x, y) = (x, y, x + y) \quad A = \{(1, 0), (0, 1)\}$$

$$A' = \{(1, 1), (1, 0)\}$$

$$B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

$$B' = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$$

$$M_{A'}^{B'}(\varphi) = P_{A'}^A M_A^B(\varphi) P_B^{B'}$$

Przykład

$$(1, 1) = 1(1, 0) + 1(0, 1)$$

$$(1, 0) = 1(1, 0) + 0(0, 1)$$

$$P_{A'}^A = (P_{A'}^{A'})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(1, 1, 1) = 1(1, 0, 0) + 1(0, 1, 0) + 1(0, 0, 1)$$

$$(1, 1, 0) = 1(1, 0, 0) + 1(0, 1, 0) + 0(0, 0, 1)$$

$$(1, 0, 0) = 1(1, 0, 0) + 0(0, 1, 0) + 0(0, 0, 1)$$

$$P_B^{B'} = (P_B^{B'})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Przykład

$$M_B^A(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\varphi_{B'}^{A'}$:

$$\varphi(e'_1) = \varphi(1, 1) = (1, 1, 2) = 2(1, 1, 1) + (-1)(1, 1, 0) + 0(1, 0, 0)$$

$$\varphi(e'_2) = \varphi(1, 0) = (1, 0, 1) = 1(1, 1, 1) + (-1)(1, 1, 0) + 1(1, 0, 0)$$

Stąd:

$$\begin{aligned} M_{B'}^{A'}(\varphi) &= P_{B'}^B M_B^A(\varphi) P_A^{A'} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Analogicznie:

$$M_{A'}^{B'}(\varphi) = P_{A'}^A M_A^B(\varphi) P_B^{B'}$$

Uwagi wstępne

- V – przestrzeń liniowa
- $f : V \rightarrow W$ – odwzorowanie przestrzeni liniowych
- B_V – baza przestrzeni liniowych, liniowo niezależny zbiór wektorów
- macierze są zdefiniowane w odpowiednich bazach
- M_n^n – zbiór macierzy kwadratowych o współczynnikach w ciele \mathbb{K} o n wierszach i n kolumnach
- $\mathcal{M}_{\mathbb{K}} = M_n^n$ – suma wszystkich macierzy kwadratowych

Definicja 8.1

Wyznacznikiem nazywamy funkcję działającą ze zbioru $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}$ do zbioru \mathbb{K} . Oznaczamy ją przez \det .

$$\det: \mathcal{M}_{\mathbb{K}} \rightarrow \mathbb{K}$$

Definicja 8.2

Dowolną funkcję różnowartościową $\sigma: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ nazywamy permutacją zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$. Oznaczamy ją:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Uwagi

- Zbiór wszystkich permutacji jest grupą oznaczaną przez S_n .
- mnożenie w S_n - składanie funkcji
- jedyńka (permutacja jednostkowa) to permutacja postaci:

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Przykład 1.

Każdą permutację można zapisać w postaci rozłącznych cykli.

$$\sigma : (1, \sigma(1), \sigma^2(1), \dots, \sigma^k(1) = 1)$$

Elementy $1, \sigma(1), \sigma^2(1), \dots, \sigma^{k-1}(1)$ tworzą tak zwany cykl.

Np.:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = (1\ 3)(4\ 5)(2)$$

$$\sigma(1) = 3$$

$$\sigma^2(1) = 1$$

$$\sigma(2) = 2 \text{ - cykl długości } 1$$

$$\sigma(4) = 5$$

$$\sigma^2(4) = 4$$

Przykład 2.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 6 & 1 & 2 & 9 & 10 & 7 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma(1) = 3 \\ \sigma^2(1) = 6 \\ \sigma^3(1) = 9 \\ \sigma^4(1) = 4 \\ \sigma^5(1) = 1 \end{array} \right\} (1 \ 3 \ 6 \ 9 \ 4)$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma(2) = 5 \\ \sigma^2(2) = 2 \end{array} \right\} (2 \ 5)$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma(7) = 10 \\ \sigma^2(7) = 8 \\ \sigma^3(7) = 7 \end{array} \right\} (7 \ 10 \ 8)$$

$$\sigma = (1 \ 3 \ 6 \ 9 \ 4)(2 \ 5)(7 \ 10 \ 8)$$

Każda permutacja jest iloczynem cykli.

Definicja 8.3

Transpozycją nazywamy cykl długości 2.

Fakt

Każdy cykl jest iloczynem transpozycji.

Ćwiczenie

Cykl $(1\ 2\ \dots\ n) = (1\ 2)(1\ 3)(1\ 4)\dots(1\ n) \in S_n$

Definicja 8.4

Permutację nazywamy:

- parzystą, gdy jest identycznościowa id lub jest iloczynem parzystej liczby transpozycji
- nieparzystą, gdy jest iloczynem nieparzystej liczby transpozycji

Znak permutacji to:

$$\operatorname{sgn}\sigma = \begin{cases} 1 & \sigma - \text{parzyste} \\ -1 & \sigma - \text{nieparzyste} \end{cases}$$

Uwaga

Dla każdego $n \geq 2$ mamy $\frac{1}{2}n!$ permutacji parzystych i $\frac{1}{2}n!$ permutacji nieparzystych.

Definicja 8.5

Niech $A \in M_n^n$, $A = [a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}$. Wyznacznik macierzy A definiujemy jako:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

Definicja 8.6 (Indukcyjna definicja wyznacznika)

Niech $A \in M_n^n$.

Dla $n = 1$ $\det[a] = a$

Dla ustalonego n $\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+n} a_{in} \det A_{in}$

(rozwinięcie Laplace'a macierzy A względem ostatniej kolumny)

$$A_{in} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i-1} & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n-1} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1i-1} & a_{i-1i+1} & \cdots & a_{i-1n-1} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1i-1} & a_{i+1i+1} & \cdots & a_{i+1n-1} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni-1} & a_{ni+1} & \cdots & a_{nn-1} \end{bmatrix},$$

gdzie A_{in} to A po wykreśleniu i -tego wiersza i n -tej kolumny.

Przykład

$$n = 2$$

$$S_2 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\sigma_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\sigma_2} \right\}$$

$$\operatorname{sgn}(\sigma_1) = -1$$

$$\operatorname{sgn}(\sigma_2) = 1$$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_2} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} = \operatorname{sgn}(\sigma_2) a_{11} a_{22} + \operatorname{sgn}(\sigma_1) a_{12} a_{21} =$$

$$a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} =$$

$$(-1)^{(1+2)} a_{12} \det[a_{21}] + (-1)^{(2+2)} a_{22} \det[a_{11}] = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

Ćwiczenie

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det A = a_{13}(-1)^{(1+3)} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} + a_{23}(-1)^{(2+3)} \det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} +$$

$$a_{33}(-1)^{(3+3)} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} =$$

$$a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{11}a_{32} + a_{23}a_{12}a_{31} + a_{33}a_{11}a_{22} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

Ćwiczenie c.d.

Metoda Sarussa:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{+1}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{-1}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}}_{-1},$$
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{-1}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{+1}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{+1}$$

Ćwiczenie

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\det A = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$$

Stwierdzenie 8.7

Niech $n \in \mathbb{N}$, i - ustalona liczba naturalna mniejsza-równa od n ,
 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha'_i$ - układ wektorów przestrzeni \mathbb{K}^n , $a, a' \in \mathbb{K}$. Wówczas:

$$\det[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, a\alpha_i + a'\alpha'_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n] = \\ a \det[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n] + \\ a' \det[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha'_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n]$$

Dowód

- Gdy $n = 1$, to $i = 1$, i tezę otrzymujemy natychmiast:
 $\det[aa_{11} + a'a'_{11}] = aa_{11} + a'a'_{11} = a \det[a_{11}] + a' \det[a'_{11}]$
- Załóżmy, że nasz wzór jest prawdziwy dla $n = m - 1 \geq 1$ i rozpatrzmy przypadek $n = m \geq 2$.

Jeśli $i \leq m - 1$, to wzór wynika wprost z definicji wyznacznika i z powyższego założenia.

Jeśli $i = m$ to:

$$\begin{aligned} \det A &= \det[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}, a\alpha_m + a'\alpha'_m] = \\ &= \sum_{i=1}^m (-1)^{i+m} (a\alpha_{im} + a'\alpha'_{im}) \det A_{im} = \\ &= a \sum_{i=1}^m (-1)^{i+m} \alpha_{im} \det A_{im} + a' \sum_{i=1}^m (-1)^{i+m} \alpha'_{im} \det A_{im}, \end{aligned}$$

gdzie przyjęliśmy, że $\alpha_m = [\alpha_{1m}, \dots, \alpha_{mm}]^T$,

$\alpha'_m = [\alpha'_{1m}, \dots, \alpha'_{mm}]^T$, $A = [\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}, a\alpha_m + a'\alpha'_m]$.

Dowód c.d.

Macierz A_{im} dla $i = 1, \dots, m$ możemy również otrzymać wykreślając i -tą wiersz i ostatnią m -tą kolumnę macierzy $[\alpha_1, \dots, \alpha_m]$ i macierzy $[\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}, \alpha'_m]$, więc:

$$\sum_{i=1}^m (-1)^{i+m} \alpha_{im} \det A_{im} = \det[\alpha_1, \dots, \alpha_m]$$
$$\sum_{i=1}^m (-1)^{i+m} \alpha'_{im} \det A_{im} = \det[\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}, \alpha'_m].$$

Zatem:

$$\det A = a \det[\alpha_1, \dots, \alpha_m] + a' \det[\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}, \alpha'_m].$$

Na mocy zasady indukcji wynika stąd prawdziwość twierdzenia dla wszystkich liczb naturalnych.

Twierdzenie 9.1

Niech n będzie liczbą naturalną, większą od 1. Załóżmy, że i, k są różnymi liczbami naturalnymi spełniającymi nierówność:

$$1 \leq i < k \leq n$$

Niech też $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^n(\mathbb{K}^n)$.

Wówczas:

- 1 Jeśli $\alpha_i = \alpha_k$, to $\det[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] = 0$.
- 2 $\det[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_k, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_i, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n] = -\det[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$
- 3 $\det[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] = (-1)^{k-i} \det[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_k, \alpha_i, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n]$

Jeśli przesuniemy i -tą kolumnę o k miejsc to wyznacznik zmienia się o $(-1)^{k-i}$.

Dowód

Jeśli $n = 2$, to $i = 1, k = 2$ i punkty 1., 2., 3. wynikają wprost ze wzoru na wyznacznik stopnia 2. Załóżmy, że twierdzenie to jest prawdziwe dla $n = m - 1 \geq 2$ i rozpatrzmy przypadek $n = m \geq 3$.

Jeśli $k < m$, to twierdzenie wynika łatwo z definicji wyznacznika oraz z założenia. Niech więc $k = m$.

Zajmiemy się najpierw dowodem punktu 1. Ponieważ wiemy już, że:

$$\det[\alpha_1, \dots, \alpha_m] = -\det[\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{m-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_{m-2}, \alpha_i, \alpha_m],$$

więc możemy przyjąć $i = m - 1, k = m$, tj. $\alpha_{m-1} = \alpha_m$. Macierz $[\alpha_1, \dots, \alpha_m]$ oznaczmy symbolem M i niech $M_{s,t;m,m-1}$ oznacza macierz powstałą z M przez skreślenie dwóch ostatnich kolumn oraz wierszy o wskaźnikach s, t .

Dowód c.d.

Wtedy:

$$\begin{aligned}\det M &= \sum_{l=1}^m (-1)^{l+m} a_{lm} \det M_{lm} = \\ &= \sum_{l=1}^m (-1)^{l+m} a_{lm} \left(\sum_{s=1}^{l-1} (-1)^{s+m-1} a_{sm} \det M_{sl;m-1,m} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{s=l+1}^m (-1)^{s-1+m-1} a_{sm} \det M_{ls;m-1,m} \right) = \\ &= \sum_{s<l} (-1)^{l+s+2m-1} a_{lm} a_{sm} \det M_{sl;m-1,m} + \\ &\quad + \sum_{l<s} (-1)^{l+s+2m-2} a_{lm} a_{sm} \det M_{ls;m-1,m} = \\ &= \sum_{s<l} (-1)^{l+s-1} a_{lm} a_{sm} \det M_{sl;m-1,m} - \\ &\quad - \sum_{l<s} (-1)^{l+s-1} a_{lm} a_{sm} \det M_{sl;m-1,m} = 0,\end{aligned}$$

gdzie przyjęliśmy, $\alpha_m = \alpha_{m-1} = [a_{1m}, \dots, a_{mm}]$.

Dowód c.d.

Dowód 1. został więc zakończony. Dla zakończenia dowodu 2. i 3. nie będziemy się ograniczać do przypadku $k = m$, gdyż dowód w przypadku ogólnym jest równie prosty.

Rozpatrzmy macierz:

$$N = [\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i + \alpha_k, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_i + \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_m].$$

Macierz ta ma dwie kolumny równe, a więc na mocy 1. $\det N = 0$.

Korzystając z stwierdzenia 8.7. oraz z punktu 1. otrzymamy z drugiej strony:

$$\begin{aligned} \det N &= \\ \det[\alpha_1, \dots, \alpha_m] + \det[\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_k, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_i, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_m] + \\ \det[\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_i, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_m] + \det[\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_k, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_m] &= \\ \det[\alpha_1, \dots, \alpha_m] + \det[\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_k, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_i, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_m]. \end{aligned}$$

Dowód c.d.

A stąd:

$$\det[\alpha_1, \dots, \alpha_m] = -\det[\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_k, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_i, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_m],$$

co kończy dowód 2.

Pozostaje więc tylko udowodnić 3. Podobnie jak wyżej, rozpatrujemy przypadek ogólny. Zamieńmy miejscami w macierzy $[\alpha_1, \dots, \alpha_m]$ kolumnę i -tą z kolumną $(i+1)$ -szą, a w tak otrzymanej macierzy zamieńmy miejscami kolumnę $(i+1)$ -szą z kolumną $(i+2)$ -gą, itd. Po $(k-i)$ krokach otrzymamy macierz:

$$[\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_k, \alpha_i, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_m].$$

Dowód c.d.

Ponieważ na mocy 2. po każdym kroku wyznacznik otrzymanej macierzy różni się od wyznacznika poprzedniej macierzy czynnikiem -1 , więc:

$$[\alpha_1, \dots, \alpha_m] = (-1)^{k-1} [\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_k, \alpha_j, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_m],$$

co kończy dowód 3.

Wykazaliśmy więc, że z prawdziwości twierdzenia dla $n = m - 1$ wynika prawdziwość twierdzenia dla $n = m$. Ponieważ na wstępie stwierdziliśmy, że twierdzenie jest słuszne dla $n = 2$, więc na mocy zasady indukcji twierdzenie zostało udowodnione.

Można łatwo wykazać, że analogiczne własności przysługują również wierszom.

Twierdzenie 9.2

Niech $n \in \mathbb{N}$, i – ustalone, takie, że

$1 \leq i \leq n$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha'_i \in \mathbb{R}^n(\mathbb{K}^n)$, $a, a' \in \mathbb{R}$. Wówczas:

$$\det \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_{i-1} \\ a\alpha_i + a'\alpha'_i \\ \alpha_{i+1} \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = a \det \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_i \\ \alpha_n \end{bmatrix} + a' \det \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_{i-1} \\ \alpha'_i \\ \alpha_{i+1} \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

(Liniowość ze względu na wiersze. Wersja wierszowa stw. 8.7.)

Twierdzenie 10.1

Niech $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Niech $k, i \in \mathbb{N}$ spełniają nierówność $1 \leq i < k \leq n$. Niech $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ będzie ciągiem wektorów przestrzeni \mathbb{K}^n . Wówczas:

1. Jeśli $\alpha_i = \alpha_k$, to

$$\det \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = 0$$

2. $\det \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = -\det$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_{i-1} \\ \alpha_k \\ \alpha_{i+1} \\ \dots \\ \alpha_{k-1} \\ \alpha_j \\ \alpha_{k+1} \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

Twierdzenie 10.1 c.d

$$3. \det \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = (-1)^{k-i} \det \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_{i-1} \\ \alpha_{i+1} \\ \dots \\ \alpha_k \\ \alpha_j \\ \alpha_{k+1} \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

Dowód

Dowód indukcyjny.

Dla $n = 2$ twierdzenie to wynika z wzoru na wartość wyznacznika macierzy stopnia 2.

Założmy, że dowodzony rezultat jest prawdziwy dla $n = m - 1$ i niech $n = m$.

Udowodnimy 1. w oparciu o założenie indukcyjne dotyczące całego twierdzenia.

Macierz $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ oznaczmy przez M . Na mocy definicji wyznacznika mamy:

$$\det M = \sum_{l=1}^m (-1)^{l+m} a_{lm} \det M_{lm},$$

gdzie elementy $a_{1m}, a_{2m}, \dots, a_{mm}$ tworzą ostatnią kolumnę macierzy M .

Dowód c.d.

Jeśli $\alpha_i = \alpha_k$, to dla $l = i, k$ macierze M_{lm} mają dwa różne wiersze, a więc wtedy $\det M_{lm} = 0$ na mocy założenia. Natomiast macierze M_{in}, M_{kn} różnią się tylko ustawieniem wierszy i korzystając z 3., dla $n = m - 1$, widać, że $\det M_{im} = (-1)^{k-i-1} \det M_{km}$. Wobec tego:

$$\det M = (-1)^{i+m} a_{im} \det M_{im} + (-1)^{k+m} a_{k,m} \det M_{km} =$$

$$\det M_{km} \left((-1)^{k+m-1} a_{im} + (-1)^{k+m} a_{km} \right) = 0,$$

gdyż $a_{im} = a_{km}$.

Dowód części 2. i 3. jest analogiczny do dowodu części 2. i 3. twierdzenia 9.1.

Na mocy zasady indukcji twierdzenie zachodzi i dowód jest zakończony.

Wnioski

Niech M będzie macierzą kwadratową stopnia większego niż 1. Jeżeli macierz M' powstaje z macierzy M poprzez dodanie do pewnej kolumny (pewnego wiersza) innej kolumny (innego wiersza) pomnożonej (pomnożonego) przez pewien element ciała \mathbb{K} , to $\det M = \det M'$.

Dowód (dla kolumn)

Niech $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ będą kolumnami macierzy M stopnia n .

Założmy, że do i -tej kolumny dodaliśmy k -tą kolumnę pomnożoną przez element $a \in \mathbb{K}$. Przyjmijmy, że $i < k$ (dla $i > k$ dowód jest analogiczny). Wtedy:

$$\det M' = \det[\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i + a\alpha_k, \alpha_{i+1} \dots \alpha_n] = \det[\alpha_1, \dots, \alpha_n] + a \det[\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_k, \alpha_{i+1} \dots \alpha_n] = \det[\alpha_1, \dots, \alpha_n] = \det M,$$

gdyż macierz $[\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_k, \alpha_{i+1} \dots \alpha_n]$ ma kolumny i -tą i k -tą równe, a więc $\det[\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_k, \alpha_{i+1} \dots \alpha_n] = 0$.

Twierdzenie 10.2 (Laplace'a (dla kolumny))

$$\text{Niech } M = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Wtedy dla dowolnej liczby naturalnej $i, 1 \leq i \leq n$ zachodzi:

$$\det M = \sum_{l=1}^n (-1)^{l+i} a_{li} \det M_{li}$$

Dowód

Jeśli $i = n$, to dowiedzona równość wynika z definicji wyznacznika.

Założmy, że $i \neq n$ i niech $M = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ oraz

$M' = [\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n, \alpha_i]$. Wtedy: $M'_{ln} = M_{li}$ dla $l = 1, \dots, n$.

Dowód c.d.

Na mocy twierdzenia 10.1 punkt 3. mamy: $\det M' = (-1)^{n-i} \det M$.
Stąd:

$$\begin{aligned} \det M &= (-1)^{n-i} \det M' = (-1)^{n-i} \sum_{l=1}^n (-1)^{l+n} a_{li} \det M'_{ln} = \\ &= \sum_{l=1}^n (-1)^{l+i} a_{li} \det M_{li}. \end{aligned}$$

Wniosek

Niech macierz M będzie równa $\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$.

Niech $l, k \in \mathbb{N}, l, k \leq n$. Wtedy:

$$\sum_{l=1}^n (-1)^{l+i} a_{li} \det M_{lk} = \begin{cases} \det M & \text{gdy } i = k \\ 0 & \text{gdy } i \neq k \end{cases}$$

Dowód

- Jeśli $i = k$, to powyższy wzór jest prawdziwy na mocy twierdzenia Laplace'a.
- Jeśli $i \neq k$, to rozpatrzmy macierz M' powstałą z M przez zastąpienie k -tej kolumny i -tą kolumną. (Macierz M' ma dwie takie same kolumny $\Rightarrow \det M' = 0$).

Z drugiej strony, korzystając z twierdzenia Laplace'a dla macierzy M' , otrzymujemy:

$$\det M' = \sum_{l=1}^n (-1)^{l+k} a_{li} \det M'_{lk} = \sum_{l=1}^n (-1)^{l+k} a_{li} \det M_{lk},$$

gdyż $M'_{lk} = M_{lk}$, co kończy dowód.

Operacje na macierzach **niezmieniające** wyznacznika

- ① dodanie do dowolnej kolumny macierzy kwadratowej innej kolumny pomnożonej przez pewien element ciała
- ② dodanie do dowolnego wiersza macierzy kwadratowej innego wiersza pomnożonego przez pewien element ciała

Operacje na macierzach **zmieniające** znak wyznacznika na przeciwny

- (3) zamiana dwóch różnych kolumn macierzy kwadratowej miejscami
- (4) zamiana dwóch różnych wierszy macierzy kwadratowej miejscami

Definicja 10.3

Niech M będzie macierzą $(n \times m)$. Macierzą transponowaną M^T macierzy M nazywamy taką $(m \times n)$ macierz, która jako swą i -tą kolumnę, dla $i = 1, \dots, n$ ma i -ty wiersz (a wobec tego jako swój j -ty wiersz dla $j = 1, \dots, m$ ma j -tą kolumnę) macierzy M .

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad M^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Uwaga

Dla macierzy jednostkowej (identyczności) I_n zachodzi:

$$I_n^T = I_n$$

Przykłady

- $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 50 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 50 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Obserwacja

Dla dowolnej macierzy A :

$$(A^T)^T = A.$$

$$A^{T \dots T} (i \text{ razy}) = \begin{cases} A & \text{dla } i \text{ parzystych} \\ A^T & \text{dla } i \text{ nieparzystych} \end{cases}$$

$$\text{Dla } A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix},$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Ćwiczenie

Dokonując operacji (1) – (4) można wychodząc z dowolnej macierzy kwadratowej dojść do macierzy diagonalnej.

Macierz diagonalna - wyznacznik takiej macierzy jest iloczynem elementów na diagonalu (przekątnej).

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$[a_{ij}] = A \text{ - diagonalna} \iff \forall i,j=1,\dots,n \ a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{gdy } i \neq j \\ a_{ii} & \text{gdy } i = j \end{cases}$$

Uwaga

W metodzie (1) – (4), jak i w teorii wyznacznika, rola wierszy i kolumn jest taka sama i symetryczna.

Twierdzenie 11.1

Wartość wyznacznika danej macierzy kwadratowej A równa się wartości wyznacznika macierzy transponowanej A^T . Innymi słowy $\det A = \det A^T$.

Dowód

Każdej operacji (1) – (4) można przyporządkować operację (1) – (4) zamieniając rolami wiersze i kolumny. Operacji (1) przyporządkowujemy w ten sposób operacją typu (2).

Zaś operacji (2) operację (1). Operacjom (3) i (4) operacje (4) i (3). odpowiednio.

Dokonując na macierzy A jakąkolwiek operację (1)-(4) otrzymujemy macierz, którą oznaczamy A_1 :

$$A \xrightarrow{(1)-(4)} A_1$$

Podobnie dokonując jakiegokolwiek operacji na macierzy A^T mamy:

$$A^T \xrightarrow{(1)-(4)} (A_1)^T$$

Dowód c.d.

Dokonując kolejnych operacji otrzymujemy:

$$A \xrightarrow{(1)-(4)} D$$

gdzie D - macierz diagonalna. Również:

$$A^T \xrightarrow{(1)-(4)} D^T = D$$

Ponieważ $D = D^T$, a operacje (1) – (2) nie zmieniają wyznacznika, natomiast operacje (3) – (4) zmieniają wyznacznik o (-1) oraz korzystając z faktu, że operacji (3) – (4) wykorzystaliśmy w obu przypadkach tę samą ilość, mamy:

$$\det A = \pm \det D = \pm \det D^T = \det A^T$$

(znak stojący przy $\det D$ i $\det D^T$ jest taki sam). Wobec tego $\det A = \det A^T$, co kończy dowód.

Jako wniosek z powyższego twierdzenia oraz z twierdzenia 10.2 otrzymujemy natychmiast następujące twierdzenie:

Twierdzenie 11.2 (Laplace'a dla wierszy)

Niech $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$
 i niech $1 \leq i \leq n$. Wówczas

$$\det A = \sum_{l=1}^n (-1)^{i+l} a_{il} \det A_{il}$$

Definicja 11.3

Niech A – dowolna macierz $n \times m$.

Rzędem kolumnowym (r_k) macierzy A nazywamy maksymalną liczbę liniowo niezależnych kolumn macierzy A . (Wymiar przestrzeni liniowej generowanej przez kolumny macierzy A .)

Rzędem wierszowym (r_w) macierzy A nazywamy maksymalną liczbę liniowo niezależnych wierszy macierzy A . (Wymiar przestrzeni liniowej generowanej przez wiersze macierzy A .)

Fakt

Dla dowolnej macierzy $A_{n \times m}$ zachodzi:

$$r_k \leq n$$

$$r_w \leq m$$

Uwaga

Niech A - macierz wymiaru $n \times m$

$r_k(A)$ – wymiar przestrzeni liniowej generowanej przez kolumny macierzy A

$r_w(A)$ – wymiar przestrzeni liniowej generowanej przez wiersze macierzy A

$$r_k(A) = \dim \operatorname{gen} \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} \right\}$$

$$K = \operatorname{gen} \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^n$$

$$r_k(A) \leq n.$$

Analogicznie $r_w(A) \leq m$.

Twierdzenie 12.1

Niech A będzie macierzą kwadratową stopnia n . Wówczas:

$$\det A \neq 0 \iff r_k = r_w = n$$

Dowód

Dowód równości $r_k = r_w$ podamy za chwilę. Z własności (1) – (4) możemy sprowadzić A do postaci diagonalnej. Wyznacznik zmieni się jedynie o znak. Jeśli pierwotnie był $\neq 0$, to taki pozostanie. Możemy więc założyć, że A – diagonalna. Z drugiej strony powyższe operacje (1) – (4) nie zmieniają r_w i r_k .

Twierdzenie 12.2

Rząd kolumnowy dowolnej macierzy M jest równy jej rzędowi wierszowemu.

Dowód

Niech $r_k = r, r_w = q$ macierzy M ,

Niech wiersze o numerach i_1, i_2, \dots, i_q i kolumny o numerach j_1, j_2, \dots, j_r macierzy M będą liniowo niezależne. Wówczas:

- 1 Każdy wiersz tej macierzy jest kombinacją liniową wybranych wierszy o numerach i_1, i_2, \dots, i_q .
- 2 Jeśli jakakolwiek kombinacja kolumn o wskaźnikach j_1, j_2, \dots, j_r równa się 0, to wszystkie współczynniki tej kombinacji są równe 0.

Rozpatrzmy układ równań

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m = 0 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2m}x_m = 0 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nm}x_m = 0 \end{cases}$$

Dowód c.d.

Układ (*) jest równoważny układowi:

$$(**) \begin{cases} a_{i_1 1}x_1 + \dots + a_{i_1 m}x_m = 0 \\ a_{i_2 1}x_1 + \dots + a_{i_2 m}x_m = 0 \\ \dots \\ a_{i_q 1}x_1 + \dots + a_{i_q m}x_m = 0 \end{cases}$$

Istotnie z (1) wynika, że każde równanie układu (*) jest kombinacją liniową równań układu (**), ponadto każde równanie układu (**) jest równaniem układu (*). Wobec tego zbiory rozwiązań układów (*) i (**) są identyczne. Niech M_1 będzie macierzą współczynników układu (**). Udowodnimy, że kolumny o numerach j_1, j_2, \dots, j_r macierzy M_1 są również liniowo niezależne.

Załóżmy, że kombinacja liniowa tych kolumn o współczynnikach $a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_r}$ równa się 0.

Przyjmijmy $a_i = 0$ dla $i \notin \{j_1, j_2, \dots, j_r\}$. Wtedy (a_1, a_2, \dots, a_m) jest rozwiązaniem układu (**), a zatem i układu (*).

Dowód c.d.

Wynika stąd, że kombinacja liniowa kolumn o numerach j_1, j_2, \dots, j_r macierzy M o współczynnikach $a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_r}$ równa się 0.

Stąd na mocy (2) : $a_{j_1} = a_{j_2} = \dots = a_{j_r} = 0$.

A zatem kolumny o wskaźnikach j_1, j_2, \dots, j_r macierzy M_1 są też liniowo niezależne.

Stąd $r_k(M_1) = r$. Ponieważ M_1 ma q wierszy, więc $r_k(M_1) \leq q$, a zatem $q \geq r$. Zamieniając rolami wiersze i kolumny otrzymamy nierówność: $r \geq q$, a stąd $r = q$, co kończy dowód.

Definicja 12.3

Niech A – macierz $(n \times m)$. Wspólną wartość rzędu kolumnowego i wierszowego macierzy A nazywamy rzędem macierzy A i oznaczamy $r(A)$.

Twierdzenie 12.4

Niech A – macierz kwadratowa stopnia n . Wówczas:

$$\det A \neq 0 \iff r(A) = n.$$

Dowód

Zmiana kolejności wierszy lub kolumn oraz dodawanie jednego wiersza lub kolumny do innego wiersza lub kolumny pomnożonej przez skalar (element ciała) nie wpływa na rząd macierzy i może jedynie zmienić znak wyznacznika.

Wystarczy więc rozpatrzyć przypadek, gdy A jest macierzą diagonalną.

$$0 \neq \det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^n a_{ii} \stackrel{(\text{def})}{=} a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \iff r(A) = n.$$

Twierdzenie 12.5

Niech M będzie $(n \times m)$ macierzą. Wówczas $r(M) = r \iff r$ jest największą taką liczbą całkowitą nieujemną, że po usunięciu pewnych $(n - r)$ wierszy i $(m - r)$ kolumn otrzymamy z macierzy M macierz stopnia r o wyznaczniku $\neq 0$.

Pozostawione kolumny i wiersze są w tym przypadku liniowo niezależne.

Dowód

Niech r będzie największym stopniem macierzy o różnym od zera wyznaczniku, którą można otrzymać z danej macierzy M skreślając pewne jej wiersze i kolumny. Wówczas $r(M) \geq 0$, gdyż na mocy twierdzenia 12.4 nieskreślone kolumny są liniowo niezależne. Z drugiej strony, z macierzy M można wybrać $r(M)$ wierszy liniowo niezależnych; odrzucając pozostałe otrzymamy macierz M' rzędu $r(M)$. Wobec tego można z macierzy M' wybrać $r(M)$ kolumn liniowo niezależnych; skreślając pozostałe otrzymamy macierz kwadratową M'' stopnia $r(M)$ i rzędu $r(M)$, a więc (na mocy twierdzenia 12.4) $\det M'' \neq 0$. Wynika stąd, że $r \geq r(M)$, co wobec wykazanej poprzednio nierówności $r \leq r(M)$ dowodzi równości $r = r(M)$.

Przykład

Jeśli A – macierz $(m \times n)$, to $r(A) \leq \min(m, n)$.

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

$$r\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}\right) \leq 2$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = -6 \neq 0 \Rightarrow r\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}\right) = 2$$

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

$$r\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}\right) \leq 2$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow r\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}\right) = 1 \vee r\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}\right) = 0$$

Definicja 12.6

Niech A macierz $n \times m$.

Przez i -ty minor (Δ_i) macierzy A rozumiemy wyznacznik macierzy kwadratowej otrzymanej z macierzy A po usunięciu z niej ostatnich $(m - i)$ kolumn oraz ostatnich $(n - i)$ wierszy.

Przykład

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = \det \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix} = a_{11},$$

$$\Delta_2 = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\Delta_3 = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \det A$$

Uwaga

Rząd macierzy nie ulegnie zmianie, jeśli wykonamy którąkolwiek z następujących operacji:

- 1 przestawienie wierszy macierzy
- 2 przestawienie kolumn macierzy
- 3 dodanie do jednego wiersza innego wiersza pomnożonego przez skalar
- 4 dodanie do jednej kolumny innej kolumny pomnożonej przez skalar
- 5 pomnożenie dowolnego wiersza przez skalar różny od 0
- 6 pomnożenie dowolnej kolumny przez skalar różny od 0

Definicja 13.1

Niech A będzie macierzą ($n \times m$) o współczynnikach rzeczywistych (\mathbb{R}), zespolonych (\mathbb{C}) lub wymiernych (\mathbb{Q}).

Niech x_1, x_2, \dots, x_m oznaczają niewiadome, a c_1, c_2, \dots, c_n niech będą stałymi z ciała ($\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$). Wyrażenie postaci:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = c_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = c_n \end{cases}$$

można zapisać:

• macierzowo:
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Definicja 13.1 c.d.

- jako: $x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \dots + x_m \begin{pmatrix} a_{m1} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$
- w postaci: $Ax = C$, gdzie A - macierz współczynników, x - wektor niewiadomych, C - macierz wyrazów wolnych

Przykład

$$\textcircled{1} \quad x = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{2} \quad 2x + 3y = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{3} \quad \begin{cases} 2x + 3y = 33 \\ 4x + 15y = 34 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 \\ 34 \end{bmatrix}$$

Definicja 13.2

Niech $Ax = C$ będzie układem równań o macierzy głównej ($n \times m$). Zbiór:

$$\left\{ (d_1, d_2, \dots, d_m) \in \mathbb{K}^m : A \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix} = C \right\}$$

nazywamy zbiorem rozwiązań układu równań liniowych $Ax = C$.

Uwaga

Powyższy zbiór rozwiązań może być pusty. Mówimy wtedy, że układ równań $Ax = C$ jest sprzeczny.

Twierdzenie 13.3 (Tw. Kroneckera-Capellego)

Układ równań $Ax = C$ ma rozwiązanie \iff rząd macierzy A jest taki sam jak rząd macierzy uzupełnionej $A_u = A_C$ - macierz A z dodatkową kolumną C .

Dowód

Niech $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ oznaczają wektory-kolumny macierzy A i niech C będzie wektorem - ostatnią kolumną macierzy A_u . Układ $Ax = C$ można zapisać jako równanie wektorowe:

$$(*) \quad x_1\alpha_1 + \dots + x_n\alpha_n = C$$

Elementy d_1, \dots, d_n ciała \mathbb{K} są rozwiązaniem równania wektorowego $(*)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C \in \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$, tj. gdy przestrzenie $V = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n, C \rangle$ i $V_1 = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle \subset V$ są identyczne. Równość $V = V_1$ jest równoważna równości wymiarów $\dim(\alpha_1, \dots, \alpha_n, C) = \dim(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, a więc równości $r(A) = r(A_u)$, co kończy dowód.

Uwaga

Niech A będzie macierzą kwadratową $n \times n$. Układ równań $Ax = C$ ma dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $r(A) = r(A_u) = n$.

Dowód

Niech $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ oznaczają wektory-kolumny kwadratowej macierzy A i niech C będzie wektorem - ostatnią kolumną macierzy A_u . Równość $r(A) = r(A_u) = n$ jest równoważna liniowej niezależności wektorów $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ oraz równości $(\alpha_1, \dots, \alpha_n, C) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, a więc jest równoważna stwierdzeniu: C można jednoznacznie przedstawić jako kombinację liniową wektorów $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Ta ostatnia własność jest oczywiście równoważna istnieniu dokładnie jednego rozwiązania układu wektorowego $x_1\alpha_1 + \dots + x_n\alpha_n = C$, a więc i układu $Ax = C$.

Twierdzenie 13.4 (Cramera)

Niech dany będzie układ równań liniowych:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = c_n \end{cases},$$

gdzie a_{ij}, c_i są elementami ciała \mathbb{K} (np. $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$) dla $i, j = 1, \dots, n$.

Niech A będzie macierzą główną tego układu i niech A_i będzie, dla $i = 1, \dots, n$, macierzą powstałą przez zastąpienie w macierzy A i -tej kolumny, kolumną wyrazów wolnych C . Jeśli $r(A) = n$ to $\det A \neq 0$ i jedynym rozwiązaniem powyższego układu jest:

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A},$$

dla $i = 1, \dots, n$.

Dowód

Jeśli $r(A) = n$, to dany układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie i $\det A \neq 0$ na mocy twierdzenia 12.4. Pozostaje więc udowodnić, że układ $\frac{\det A_1}{\det A}, \dots, \frac{\det A_n}{\det A}$ jest w tym przypadku rozwiązaniem, a więc że:

$$a_{i1} \frac{\det A_1}{\det A} + \dots + a_{in} \frac{\det A_n}{\det A} = c_i,$$

dla $i = 1, \dots, n$.

Z twierdzenia 10.2 (Laplace'a dla kolumn) wynika, że

$\det A_j = \sum_{l=1}^n (-1)^{l+j} c_l \det A_{lj}$ dla $j = 1, \dots, n$, a wobec tego:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} \det A_j &= \sum_{j,l=1}^n a_{ij} (-1)^{l+j} c_l \det A_{lj} = \\ &= \sum_{l=1}^n c_l \left(\sum_{j=1}^n (-1)^{l+j} a_{ij} \det A_{lj} \right) = c_l \det A, \end{aligned}$$

na mocy wniosku po twierdzeniu 10.2 (Laplace'a dla kolumn).

Dowód c.d.

Wobec tego:

$$\sum a_{ij} \frac{\det A_j}{\det A} = c_i,$$

dla $i = 1, \dots, n$, co należało udowodnić.

Przypomnienie

Przypomnijmy twierdzenie Cramera: $Ax = C$

A – macierz $n \times n$

rzęd n , $\det A \neq 0$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A},$$

dla $i = 1, \dots, n$ gdzie A_i – macierz powstała z macierzy A przez zastąpienie kolumny i kolumną C .

Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ k_4 - 5k_3 \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -11 \\ 2 & 1 & -11 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ k_2 - 2k_1 \end{matrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -11 \\ 2 & -3 & -11 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -11 \\ -3 & -11 \end{vmatrix} = -33 \neq 0$$

Ponieważ $\det A \neq 0$, więc założenia tw. Cramera są spełnione.

Przykład c.d.

Rozwiązaniem układu: $A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

będą: $x_1 = \frac{\det A_1}{-33}$, $x_2 = \frac{\det A_2}{-33}$, $x_3 = \frac{\det A_3}{-33}$, $x_4 = \frac{\det A_4}{-33}$.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rozważanie

Niech $Ax = B$, gdzie A – macierz $n \times m$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}.$$

Zakładamy, że

$$\underbrace{r(A) = r(A|B)}$$

założenie z tw. Kroneckera-Capellego jest spełnione

$$\text{gdzie } A|B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} & b_n \end{bmatrix}$$

$$r(A) = k \leq \min(m, n)$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix} = \det(A_k) \neq 0 \Rightarrow r(A) = k$$

Rozważanie c.d.

Tutaj A_k jest macierzą, którą uzyskujemy z macierzy A zmieniając kolejność wierszy tak, by k – pierwszych wierszy było liniowo niezależnych. Następnie zmieniając kolejność niewiadomych dostajemy, że k – pierwszych kolumn macierzy A jest liniowo niezależne. Mamy więc:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & \cdots & a_{km} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix}$$

(Pozostałe równania można pominąć, bo nie są liniowo niezależne)

Zatem układ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_k + \dots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nk}x_k + \dots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

Rozważanie c.d.

jest równoważny układowi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k = b_1 - a_{1k+1}x_{k+1} - \dots - a_{1m}x_m \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_k = b_2 - a_{2k+1}x_{k+1} - \dots - a_{2m}x_m \\ \dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kk}x_k = b_k - a_{kk+1}x_{k+1} - \dots - a_{km}x_m \end{cases}$$

Powyższy układ równań ma kwadratową macierz główną o wyznaczniku różnym od 0.

Teraz skorzystamy z tw. Cramera.

Niewiadome o indeksach: $k + 1, k + 2, \dots, m$ traktujemy jako parametry.

Dla $j = 1, \dots, k$

$$x_j = \frac{\det \bar{A}_j}{\det A} = \frac{\det \bar{A}_j \left(b - x_{k+1}a_{k+1} - x_{k+2}a_{k+2} - \dots - x_m a_m \right)}{\det A}$$

gdzie \bar{A}_j – macierz powstała z macierzy $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix}$

Rozważanie c.d.

poprzez zamienę kolumny $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{kj} \end{bmatrix}$ kolumną wyrazów wolnych

$$\begin{bmatrix} b_1 - a_{1k+1}x_{k+1} - \dots - a_{1m}x_m \\ b_2 - a_{2k+1}x_{k+1} - \dots - a_{2m}x_m \\ \vdots \\ b_k - a_{kk+1}x_{k+1} - \dots - a_{km}x_m \end{bmatrix} \cdot$$

Korzystając z własności wyznacznika mamy dla $j = 1, \dots, k$:

$$\begin{aligned} x_j &= \det \frac{\overline{A}_j(b - x_{k+1}a_{k+1} - \dots - x_m a_m)}{\det A} = \\ &= \frac{\det \overline{A}_j(b)}{\det A} - \frac{\det \overline{A}_j(a_{k+1})}{\det A} x_{k+1} - \dots - \frac{\det \overline{A}_j(a_m)}{\det A} x_m \end{aligned}$$

Wniosek:

Jeżeli wyjściowy układ równań jest niesprzeczny (tzn. spełnione jest tw. Kroneckera-Capellego) i jego rząd jest mniejszy od liczby niewiadomych m , to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Przykład

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 - x_5 = 1 \\ x_1 + 5x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 2 \\ x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 = 3 \end{cases}$$

Liczmy rząd:
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} = -2 \neq 0$$

Przykład c.d.

$$r(A) = r\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}\right) = 3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 - 4x_4 + x_5 \\ x_1 + 5x_3 = 2 + 2x_4 - 2x_5 \\ x_2 - 3x_3 = 3 - x_4 + 3x_5 \end{cases},$$

x_4, x_5 – parametry.

Rozwiązaniem powyższego układu jest:

$$\begin{cases} x_1 = 28 - \frac{21}{2}x_4 - 12x_5 \\ x_2 = 21 + 2x_4 + 9x_5 \\ x_3 = 6 + \frac{5}{2}x_4 + 2x_5 \end{cases}$$

Zatem ma on nieskończenie wiele rozwiązań.

Stwierdzenie 14.1

Jeśli rząd macierzy A jest równy k , to wymiar obrazu homomorfizmu A jest równy k , tzn.

$$\dim \operatorname{im} A = k$$

Dowód

Wszystkie liniowo niezależne kolumny definiują liniowo niezależne elementy obrazu A .

Stwierdzenie 14.2

$$\dim \operatorname{im} A = r(A)$$

Podsumowanie

Niech: $Ax = B$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

- 1 Tw. Kroneckera-Capellego: $r(A) = r(A|B) \iff Ax = B$ ma rozwiązanie
- 2 $n = m \wedge \det A \neq 0 \Rightarrow$ tw. Cramera
- 3 $\dim \operatorname{im} A = r(A)$

$A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$

$\operatorname{im} A = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists x \in \mathbb{R}^m Ax = y\}$

W sposób oczywisty $\operatorname{im} A$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni \mathbb{R}^n , tzn. $\operatorname{im} A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Podsumowanie c.d.

- 1 Aby zacząć rozwiązywać równanie $Ax = B$ musimy mieć spełnione założenia tw. Kroneckera-Capellego, czyli $r(A|B) = r(A)$
- 2 Pokazaliśmy, że $\dim \operatorname{im} A = r(A)$ (tw. 14.1 i 14.2)
 $\operatorname{im} A = \operatorname{gen}\{Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_m\} = \operatorname{gen}\{\text{kolumny macierzy } A\}$.
 $\mathbb{R}^m \ni e_i = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-te miejsce}}, 0, \dots, 0)$

Uzasadnienie

$$\subseteq \forall y \in \operatorname{im} A \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}^m Ax = y$$

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_m e_m = \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i$$

$$A\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^m \alpha_i A(e_i) \in \operatorname{gen}\{Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_m\}$$

Podsumowanie c.d.

Wykorzystamy teraz fakt, że $Ae_i = i$ -ta kolumna macierzy A .

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n-11} & \cdots & a_{n-1i} & \cdots & a_{n-1m} \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{n-1i} \\ a_{ni} \end{bmatrix}$$

$$e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

$$\text{gen}\{Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_m\} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \sum_{i=1}^m \beta_i Ae_i \mid \forall_{1 \leq i \leq m} \beta_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Weźmy element z z $\text{gen}\{Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_m\}$ tzn. $z = \sum_{i=1}^m \beta_i Ae_i$ dla

pewnych $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m \in \mathbb{R}$

$$z = \sum_{i=1}^m A(\beta_i e_i) = A\left(\sum_{i=1}^m \beta_i e_i\right)$$

Podsumowanie c.d.

A to oznacza, że $z \in \text{im}A$, bo $z = Ax$, gdzie $x = \sum_{i=1}^m \beta_i e_i$

$\text{im}A = \text{gen}\{\text{kolumny macierzy } A\}$

$\dim \text{im}A = \dim(\text{gen}\{\text{kolumny macierzy } A\})$

$\dim \text{im}A = r(A)$.

Definicja 14.3

Układ równań postaci: $Ax = 0$ nazywamy układem jednorodnym gdzie

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$ – dowolna macierz $(n \times m)$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$ –

macierz niewiadomych, $0 \in \mathbb{R}^n$.

Uwaga

Ponieważ zawsze $r(A) = r(A|0)$, więc układy jednorodne nie są nigdy sprzeczne i mają zawsze rozwiązanie.

Dowolne rozwiązania układu jednorodnego $Ax = 0$ jest równoważne opisaniu jądra homomorfizmu A .

$$\ker A = \{x \in \mathbb{R}^m \mid Ax = 0\}$$

Wniosek

Zbiór rozwiązań układu jednorodnego jest podprzestrzenią liniową przestrzeni \mathbb{R}^m .

$$\ker A \subset \mathbb{R}^m$$

$$r(A) = k \leq \min(m, n)$$

Wprowadzenie

Równania jednorodne: $Ax = 0$

Jak się szuka rozwiązań równania jednorodnego?

$$Ax = 0$$

$$A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$\ker A = \{y \in \mathbb{R}^m \mid Ay = 0\}$ - zbiór wszystkich rozwiązań układu jednorodnego.

Ponieważ $\ker A \subset \mathbb{R}^m$ - podprzestrzeń liniowa, więc jej opisanie to np. znalezienie bazy.

- 1 Równanie jednorodne zawsze spełnia tw. Kroneckera-Capellego
- 2 Szukanie rozwiązań równania jednorodnego to szukanie jądra homomorfizmu liniowego $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$

Wprowadzenie c.d.

Jak to się robi?

$$A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\dim \operatorname{im} A = r(A)$$

Niech $k = \dim \ker A$. Ponadto z tw. o izomorfizmie mamy, że:

$$m - k = \dim \operatorname{im} A = r(A).$$

$$\text{Zatem } k = m - r(A)$$

$$\mathbb{R}^m / \ker A \cong \operatorname{im} A$$

Szukanie rozwiązań

Układ równań jednorodnych $Ax = 0$ ma zawsze rozwiązanie zerowe.

$$A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Jeśli $n = m$ i $\det A \neq 0$, to rozwiązanie jest tylko zerowe.

Wybierzmy $r(A)$ liniowo niezależnych wierszy macierzy A .

Szukanie rozwiązań c.d.

Założmy, że kolumny o numerach $1, 2, \dots, r(A)$ są liniowo niezależne.

Niech $l = r(A)$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = 0 \\ \dots \\ a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \dots + a_{lm}x_m = 0 \end{cases}$$

Ponieważ rząd kolumnowy jest równy rzędowi wierszowemu, możemy założyć (np. przenumerowując niewiadome), że l – pierwszych kolumn jest także liniowo niezależne.

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1l}x_l + a_{1l+1}x_{l+1} + \dots + a_{1m}x_m = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2l}x_l + a_{2l+1}x_{l+1} + \dots + a_{2m}x_m = 0 \\ \dots \\ a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \dots + a_{ll}x_l + a_{ll+1}x_{l+1} + \dots + a_{lm}x_m = 0 \end{cases}$$

Szukanie rozwiązań c.d.

- 1 Jeśli $l = m$, to istnieje tylko rozwiązanie zerowe.
- 2 $l < m$

Z postaci równania (*) traktujemy niewiadome x_l, x_{l+1}, \dots, x_m jako parametry i konstruujemy bazę $\ker A$ w następujący sposób:

- Podstawiamy za parametry kolejno:

x_{l+1} ,	x_{l+2}	\dots	x_m
1,	0,	\dots ,	0
0,	1,	0,	0
\vdots	\vdots	\dots	\vdots
0,	0,	\dots	1

W ten sposób definiujemy bazę jądra $\ker A$, złożoną z $(m - l)$ liniowo niezależnych wektorów.

Szukanie rozwiązań c.d.

Do każdego układu zer i jedynek obliczamy x_1, x_2, \dots, x_l .

W konsekwencji otrzymujemy $m - l$ liniowo niezależnych rozwiązań.

Dla układu $x_{l+1} = 1, x_{l+2} = 0, \dots, x_m = 0$ niewiadome x_1, x_2, \dots, x_l obliczamy z układu:

$$(**) \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1l}x_l + a_{1l+1}x_{l+1} = 0 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2l}x_l + a_{2l+1}x_{l+1} = 0 \\ \dots \\ a_{l1}x_1 + \dots + a_{ll}x_l + a_{ll+1}x_{l+1} = 0 \end{cases}$$

Układ (**) powstał z układu (*). Jest to układ Cramera i niewiadome x_1, x_2, \dots, x_l znajdujemy ze wzorów Cramera.

Przykład

$$A : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 15x_1 + 12x_2 + 9x_3 + 6x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$r(A) = 2, m - 2 = 3 = \dim\{\text{przestrzeni rozwiązań}\}$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

$x_3,$	x_4	x_5
1,	0,	0
0,	1,	0
0,	0,	1

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 = -3 \\ 6x_1 + 2x_2 = -3 \end{cases}$$

Przykład c.d.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{6}{-14} = -\frac{3}{7}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{3}{-14} = -\frac{3}{14}$$

$$\text{Odp.1. : } \left(-\frac{3}{7}, -\frac{3}{14}, 1, 0, 0\right)$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 = -2 \\ 6x_1 + 2x_2 = -2 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{4}{-14} = -\frac{2}{7}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{2}{-14} = -\frac{1}{7}$$

$$\text{Odp.2. : } \left(-\frac{2}{7}, -\frac{1}{7}, 0, 1, 0\right)$$

Przykład c.d.

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 = -1 \\ 6x_1 + 2x_2 = -1 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{2}{-14} = -\frac{1}{7}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{1}{-14} = -\frac{1}{14}$$

Odp.3. : $(-\frac{1}{7}, -\frac{1}{14}, 0, 0, 1)$

Rozwiązanie:

$$\left(-\frac{3}{7}, -\frac{3}{14}, 1, 0, 0\right), \left(-\frac{2}{7}, -\frac{1}{7}, 0, 1, 0\right), \left(-\frac{1}{7}, -\frac{1}{14}, 0, 0, 1\right)$$

Uwaga

$Ax = B$ - układ równań liniowych

$A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$

Rozwiązanie układu równań:

$$\begin{aligned} ZR &= \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}^m \mid Ax = B\} \end{aligned}$$

Rozważmy $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Uwaga c.d.

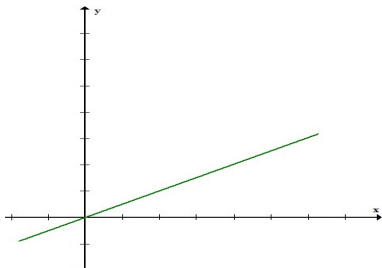
Jeśli:

- $\det A \neq 0$ - istnieje dokładnie jedno rozwiązanie
- $\det A = 0$ - tw. Kroneckera-Capellego

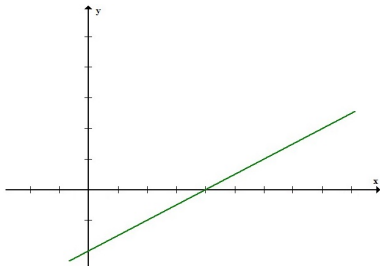
$r(A) = 0$ - nie ma o czym mówić

Pozostaje przypadek $r(A) = 1$.

Jeśli $r(A) = 1$ i spełnione są założenia tw. Kroneckera-Capellego, to równanie $Ax = B$ jest równoważne równaniu $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$. Stąd zbiór rozwiązań jest prostą.



Rysunek: Rozwiązanie układu jednorodnego



Rysunek: Rozwiązanie układu jednorodnego przesuniętego o wektor

Twierdzenie 16.1

Niech:

$$(*) \quad Ax = B$$

będzie liniowym układem równań z macierzą główną A o n – wierszach i m – kolumnach oraz wyrazach wolnych B . Załóżmy, że $r(A) = r(A|B)$. Wtedy zbiór rozwiązań (ZR) układu (*) ma postać:

$$d + D \subset \mathbb{R}^m,$$

gdzie

- d jest szczególnym rozwiązaniem układu (*) (tzn. $Ad = B$)
- $D = \ker A$ (tzn. jest rozwiązaniem układu jednorodnego)

Rozwiązanie (*) jest więc zbiorem postaci:

$$d + D \stackrel{\text{def}}{=} \{d + x \in \mathbb{R}^m \mid x \in D\}.$$

Dowód

$ZR = d + D$, gdzie $D = \{x \in \mathbb{R}^m \mid Ax = 0\}$.

" \supset " Niech: $d + D \ni x = d + c$, gdzie $c \in D$. Wtedy:

$$Ax = A(d + c) = Ad + Ac = B + 0 = B.$$

" \subset " Niech:

$$x \in ZR \Rightarrow Ax = B$$

$Ad = B$ - ponieważ d jest szczególnym rozwiązaniem.

- Jeżeli $x = d$, to:

$$\det A \neq 0$$

$$\text{i } \ker A = D = \{0\} \Rightarrow x = d + 0 = d + D.$$

- Jeżeli $x \neq d$, to:

$A(x - d) = Ax - Ad = 0$. Oznacza to, że $x - d \in D$. Stąd:

$$\exists z \in D \ x - d = z \Rightarrow x = d + z \in d + D.$$

Przykład

Niech:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 5$$

- 1 Rozwiązanie szczególne $(5, 0, \dots, 0)$
- 2 $\{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\} = D$
- 3 $ZR = (5, 0, \dots, 0) + D$

Definicja 16.2

Układem schodkowym nazywamy układ równań liniowych postaci:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_k + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{kk}x_k + \dots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases}$$

Obserwacja

- 1 Każdy układ równań można sprowadzić poprzez operacje elementarne do postaci schodkowej
- 2 Jeżeli wykonując operacje elementarne na wierszach macierzy $[A|I]$, uzyskamy macierz $[I|B]$, to $B = A^{-1}$,

gdzie:

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 1 \end{array} \right],$$

$$[I|B] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{array} \right]$$

Przykład

1

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 4z = 2 \\ 2x + 3y + 3z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + 3z = 1 \\ y + z = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + 3z = 1 \\ -2z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ y = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

2

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + y + z = 1 \\ 4x + 3y - z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = 1 \\ -y + 3z = -1 \\ -y + 3z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = 1 \\ -y + 3z = -1 \\ 0 = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

\Rightarrow Sprzeczność

Uwaga

Niech: $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$.

$$r(A) = \dim \operatorname{im} A,$$

bo obraz jest generowany przez kolumny macierzy A .

Niech $\dim \ker A = l$. Wtedy:

$$m - l = r(A)$$

$$l = m - r(A)$$

Definicja 16.3

Niech V - przestrzeń liniowa wymiaru n , $V_1 \subset V$ - podprzestrzeń liniowa. V_1 definiuje następującą relację równoważności \sim na przestrzeni V :

$$\forall v, w \in V \quad v \sim w \stackrel{\text{def}}{\iff} v - w \in V_1.$$

Uwaga

Relacja \sim z definicji 16.3, jako relacja równoważności, jest:

- zwrotna: $v \sim v$

$$v - v \in V_1$$

- symetryczna: $v \sim w \Rightarrow w \sim v$

$$v - w \in V_1 \Rightarrow -(v - w) = w - v \in V_1$$

- przechodnia: $v \sim w \wedge w \sim t \Rightarrow v \sim t$

$$v - w \in V_1 \wedge w - t \in V_1 \Rightarrow (v - w) - \left(-(w - t) \right) = v - t \in V_1$$

Stwierdzenie 16.4

Zbiór klas abstrakcji relacji \sim definiuje przestrzeń ilorazową V/V_1 .

Uwaga

Klasę abstrakcji elementu $v \in V$ będziemy oznaczać przez $[v]$.

Ćwiczenie

Pokazać, że:

- 1 $[v] = v + V_1 = \{v + x \mid x \in V_1\}$
- 2 $[x], [y] \in V/V_1 \Rightarrow [x] + [y] = [x + y]$
- 3 $[0] \in V/V_1$
- 4 $\forall \lambda \in \mathbb{R} \lambda[x] = [\lambda x]$

Przypomnienie

Niech: V – przestrzeń wymiaru n nad dowolnym ciałem

\mathbb{K} , $W \subset V$ – podprzestrzeń przestrzeni V .

Określmy relację równoważności \sim . Dla

$v_1, v_2 \in V$ $v_1 \sim v_2 \iff v_1 - v_2 \in W$. Relacja ta jest:

- zwrotna: $\forall v \in V \ v \sim v$
- symetryczna: $\forall v_1, v_2 \in V \ v_1 \sim v_2 \Rightarrow v_2 \sim v_1$
- przechodnia: $\forall v_1, v_2, v_3 \in V \ v_1 \sim v_2 \wedge v_2 \sim v_3 \Rightarrow v_1 \sim v_3$

Relacja równoważności \sim dzieli V na klasy abstrakcji.

Klasą abstrakcji elementu $v \in V$ definiujemy jako $[v] = \{v' \in V \mid v' \sim v\}$.

Zbiór klas abstrakcji elementów z V oznaczamy V/W .

Struktura przestrzeni liniowej

Na zbiór klas abstrakcji wprowadzamy strukturę przestrzeni liniowej. Przestrzeń V/W definiujemy jako zbiór klas abstrakcji przestrzeni V . Wprowadzamy działania:

- $\forall [v_1], [v_2] \in V/W \quad [v_1] + [v_2] = [v_1 + v_2]$
- $\forall [v] \in V/W \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda[v] = [\lambda v]$

Możemy pokazać, że powyższa definicja nie zależy od wyboru reprezentantów.

$$[v_1] = \{v_1 + w \mid w \in W\}$$

$$[v_2] = \{v_2 + w \mid w \in W\}$$

$$[v_1 + v_2] = [(v_1 + v_2) + W]$$

Pokażemy, że:

$$\begin{cases} v'_1 \sim v_1 \\ v'_2 \sim v_2 \end{cases} \Rightarrow (v'_1 + v'_2) \sim (v_1 + v_2)$$

Struktura przestrzeni liniowej c.d.

Wiemy, że:

$$v'_1 \sim v_1 \iff v'_1 - v_1 \in W$$

$$v'_2 \sim v_2 \iff v'_2 - v_2 \in W$$

Ponieważ W jest podprzestrzenią liniową, więc:

$$(v'_1 - v_1) + (v'_2 - v_2) \in W$$

$$(v'_1 + v'_2) - (v_1 + v_2) \in W \iff (v_1 + v_2) \sim (v'_1 + v'_2).$$

Otrzymujemy stąd wniosek, że V/W jest zbiorem z działaniem dodawania, które jest łączne i przemienne.

Pokażemy teraz, że drugie działanie z definicji, mnożenie przez skalar, nie zależy od wyboru reprezentanta v .

Weźmy $[v'] \in V$ taki, że $[v'] = [v] \Rightarrow v - v' \in W$.

Musimy udowodnić, że $\lambda[v'] = [\lambda v'] = \lambda[v]$.

Ponieważ W jest podprzestrzenią liniową, więc

$$\lambda(v - v') = (\lambda v - \lambda v') \in W$$

Zatem $\lambda v \sim \lambda v'$, stąd $\lambda v = \lambda v'$.

Warto zauważyć też, że $[0] \in V/W$.

Twierdzenie 17.1

Niech V – przestrzeń liniowa, $W \subset V$ – podprzestrzeń. Zbiór klas abstrakcji V/W jest przestrzenią liniową z działaniem indukowanym z V takim, że:

- $\forall v_1, v_2 \in V \quad [v_1] + [v_2] = [v_1 + v_2]$
- $\forall v \in V \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda[v] = [\lambda v]$

Przykłady

- $V = \mathbb{R}^2, W = \{0\}$
 $V/W = V$, bo $(v_1 + 0) + (v_2 + 0) = (v_1 + v_2) + 0$
- $V = \mathbb{R}^2, W = \mathbb{R}^2$
 $V/W = \{0\}$ – zerowa przestrzeń

Uzasadnienie:

W tym przypadku V/W jest zbiorem jednoelementowym, tzn.

$$\forall v_1, v_2 \in V \quad v_1 \sim v_2 \iff (v_1 - v_2) \in W$$

$$\forall v \in V \quad 0 + v = v + 0 \iff [0] = [v]$$

Przykłady c.d.

- $V = \mathbb{R}^2, W = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$

$$V/W = \{v + x \mid x \in W\}$$

Udowodnimy, że $\dim_{\mathbb{R}} V/W = 1$.

Pokażemy, że bazą V/W jest dowolna klasa abstrakcji:

$$[v] \in V/W, v \ni W.$$

W tym celu wyznaczmy dowolną klasę abstrakcji:

$$\forall (x,y) \in V \exists \lambda \in \mathbb{R} [(x,y)] = \lambda[(-1,1)] \iff (x,y) - \lambda(-1,1) \in W \Rightarrow$$
$$\exists \lambda \in \mathbb{R} (x + \lambda, y - \lambda) = (z, 0)$$

$[(-1,1)] \in V/W$ i jest bazą.

$$\begin{cases} x + \lambda = z \\ y = \lambda \end{cases}$$

$$(x,y) - y(-1,1) = (x+y, 0) \in W$$

Pokazaliśmy, że $\forall (x,y) \in V [(x,y)] = [(-y,y)] = y[(-1,1)]$

Zatem V/W jest przestrzenią liniową wymiaru 1 o bazie $[(-1,1)]$.

Twierdzenie 17.2

Niech V będzie n -wymiarową przestrzenią liniową, a $W \subset V$ jej k -wymiarową podprzestrzenią ($0 \leq k \leq n$). Wówczas:

$$\dim V/W = n - k.$$

Dowód

Niech f_1, f_2, \dots, f_k – baza przestrzeni W . Z tw. 4.3 (Steinitza) wiemy, że istnieje baza przestrzeni V postaci: $f_1, f_2, \dots, f_k, f_{k+1}, \dots, f_n$.

Udowodnimy, że układ wektorów: $[f_{k+1}], [f_{k+2}], \dots, [f_n]$ jest bazą przestrzeni V/W . Do pokazania mamy, że układ wektorów

$[f_{k+1}], [f_{k+2}], \dots, [f_n]$:

- 1 jest liniowo niezależny
- 2 generuje V/W

Dowód c.d.

1. Liniowa niezależność:

$\alpha_1[f_{k+1}] + \dots + \alpha_{n-k}[f_n] = 0 \iff [\alpha_1 f_{k+1} + \dots + \alpha_{n-k} f_n] = 0 \iff$
 $\alpha_1 f_{k+1} + \dots + \alpha_{n-k} f_n \in W$. Z definicji każdy wektor z W jest kombinacją liniową wektorów f_1, f_2, \dots, f_k . Stąd:

$\alpha_1 f_{k+1} + \dots + \alpha_{n-k} f_n = \beta_1 f_1 + \dots + \beta_k f_k$. Mamy

$\alpha_1 f_{k+1} + \dots + \alpha_{n-k} f_n - \beta_1 f_1 - \dots - \beta_k f_k = 0$.

Ponieważ układ $f_1, \dots, f_k, f_{k+1}, \dots, f_n$ jest bazą V , więc jest liniowo niezależny, stąd $\alpha_1 = \dots = \alpha_{n-k} = 0$.

Dowód c.d.

2. Pokazujemy, że $[f_{k+1}], [f_{k+2}], \dots, [f_n]$ generuje V/W

$$\forall [x] \in V/W \quad x = \underbrace{\gamma_1 f_1 + \dots + \gamma_k f_k}_{\in W} + \gamma_{k+1} f_{k+1} + \dots + \gamma_n f_n$$

Z def. \sim mamy: $x \sim \gamma_{k+1} f_{k+1} + \dots + \gamma_n f_n$,

czyli $\left(x - \sum_{i=k+1}^n \gamma_i f_i\right) \in W$

Stąd: $[x] = [\gamma_{k+1} f_{k+1} + \dots + \gamma_n f_n] = \gamma_{k+1} [f_{k+1}] + \dots + \gamma_n [f_n]$.

Stąd $\dim V/W = n - k$.

Twierdzenie 17.3 (o izomorfizmie)

Niech $A : V_1 \rightarrow V_2$ - homomorfizm przestrzeni liniowych wymiarów m i n odpowiednio. Wówczas $V_1 / \ker A$ jest izomorficzne z $\text{im } A$, tzn.

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{A} & \text{im } A \subset V_2 \\ & \searrow \sigma & \nearrow \bar{A} \\ & V_1 / \ker A & \end{array}$$

$$V_1 / \ker A \simeq \text{im } A$$

Dowód

Zauważmy, że odwzorowanie $\sigma : V_1 \rightarrow V_1 / \ker A$ zdefiniowane wzorem:

$$\forall v \in V \quad v \rightarrow [v]$$

jest homomorfizmem przestrzeni liniowych.

Udowodnimy, że

$$V_1 / \ker A \xrightarrow{\bar{A}} \operatorname{im} A \subset V$$

jest izomorfizmem zdefiniowanym następująco.

Niech: $\forall [x] \in V_1 / \ker A \quad \bar{A}([x]) \stackrel{\text{def}}{=} A(x)$.

Musimy pokazać, że \bar{A} jest dobrze zdefiniowane, tzn. jeżeli $[x] = [x']$, to $\bar{A}([x]) = \bar{A}([x'])$, czyli $A(x) = A(x')$.

Ale:

$$x - x' \in \ker A \iff A(x - x') = 0$$

$$Ax - Ax' = 0$$

$$Ax = Ax'$$

Wprowadźmy teraz lemat:

Lemat

$f : V \rightarrow W$ jest izomorfizmem przestrzeni liniowych
 $\iff \ker f = 0, \operatorname{im} f = W$

Dowód lematu

" \Rightarrow " f – "na", stąd $\operatorname{im} f = W$

f – izomorfizm $\Rightarrow f(x) = f(x') \Rightarrow x = x' \Rightarrow \ker f = 0$

" \Leftarrow " Zakładamy, że $\ker f = 0$ i $\operatorname{im} f = W \Rightarrow f$ jest epimorfizmem ("na").

f – różnowartościowa, stąd $f(x) = f(x') \Rightarrow x - x' \in \ker f \Rightarrow x = x'$

Dowód tw.c.d.

Z definicji \bar{A} jest "na" i $\ker(\bar{A}) = 0$. Stąd i z lematu \bar{A} jest izomorfizmem.
Co kończy dowód.

Przypomnienie

Niech: $A : V \rightarrow W$ - homomorfizm skończenie wymiarowych przestrzeni liniowych.

$\ker A = \{x \in V \mid Ax = 0\} \subseteq V$ - podprzestrzeń liniowa V .

Niech $\dim V = n, \dim \ker A = k$.

Ponieważ $\ker A$ jest podprzestrzenią liniową V , więc $k \leq n$.

Zdefiniowaliśmy przestrzeń ilorazową $V/\ker A$. Pokazaliśmy, że:

$$\dim V/\ker A = n - k.$$

$V/\ker A = \{x + \ker A \mid x \in V\}$ - zbiór warstw

$$(x + \ker A) + (y + \ker A) = (x + y) + \ker A$$

$$\lambda(x + \ker A) = \lambda x + \ker A$$

$$V/\ker A \simeq \operatorname{im} A$$

Definicja 18.1

Niech $A : V \rightarrow V$ będzie homomorfizmem przestrzeni liniowych. Wartością własną $\lambda \in \mathbb{K}$ (\mathbb{R}, \mathbb{C}) homomorfizmu A nazywamy skalar λ , dla którego istnieje element $0 \neq v \in V$, taki że:

$$A(v) = \lambda v$$

Definicja 18.2

Powyżej zdefiniowany niezerowy wektor $v \in V$ nazywamy wektorem własnym wartości własnej λ .

Przykład

- 1 Niech $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ homomorfizm liniowy.

Istnieje dokładnie jedna wartość własna homomorfizmu A .

$$A = [a] \iff A(1) = a$$

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} A(x) = A(x \cdot 1) = xA(1) = xa$$

Stąd tylko a jest wartością własną A .

- 2 Niech $\lambda \in \mathbb{K}$ będzie wartością własną A , zatem:

$$\exists_{0 \neq x \in V} A(x) = \lambda x$$

$$Ax = \lambda x \iff Ax - \lambda x = 0 \iff (A - \lambda I)x = 0$$

Definicja 18.3

Wielomianem charakterystycznym homomorfizmu $A : V \rightarrow V$ nazywamy wielomian $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

Uwaga

W powyższej definicji oznaczamy przez A zarówno homomorfizm jak i jego macierz w pewnej bazie e_1, e_2, \dots, e_n .

Okazuje się, że jeśli macierz przedstawimy w dowolnej innej bazie, (np. f_1, f_2, \dots, f_n), to wielomian charakterystyczny $p(\lambda)$ będzie taki sam.

A – macierz A w bazie e_1, e_2, \dots, e_n .

C – macierz przejścia z bazy e_1, e_2, \dots, e_n do bazy f_1, f_2, \dots, f_n .

CAC^{-1} – macierz A w bazie f_1, f_2, \dots, f_n .

Z jednej strony:

$$\begin{aligned}\det A &= \det(CAC^{-1}) = \det C \det A \det C^{-1} = \\ &= \det A \det C \det C^{-1} = \det A \det I = \det A.\end{aligned}$$

Z drugiej:

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) &= 1 \det(A - \lambda I) = \det I \det(A - \lambda I) = \\ &= \det(CC^{-1}) \det(A - \lambda I) = \det C \det C^{-1} \det(A - \lambda I) = (*)\end{aligned}$$

Uwaga c.d.

Korzystając ze wzoru Cauchy'ego: $\det(AB) = \det A \det B$

Zatem:

$$(*) = \det C \det(A - \lambda I) \det C^{-1} = \det \left(C(A - \lambda I) \right) \det C^{-1} = \\ \det \left(C(A - \lambda I)C^{-1} \right) = \det(CAC^{-1} - \lambda I)$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda I = 0 \iff Ax = \lambda x$$

$$\det(A - \lambda I) = p(\lambda)$$

$$\deg p(\lambda) = n$$

Przykłady

1 $[a] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\det[a - \lambda] = 0 \iff a - \lambda = 0 \iff \lambda = a$$

2 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 3 & 4 - \lambda \end{bmatrix} = 0 \iff (1 - \lambda)(4 - \lambda) - 6 = 0 \iff$$

$$4 - \lambda - 4\lambda + \lambda^2 - 6 = 0 \iff \lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$$

$$\Delta = 25 + 8 = 33$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{33}$$

$$\lambda_1 = \frac{5 - \sqrt{33}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{5 + \sqrt{33}}{2}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 - \frac{5 - \sqrt{33}}{2} & 2 \\ 3 & 4 - \frac{5 - \sqrt{33}}{2} \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 - \frac{5 + \sqrt{33}}{2} & 2 \\ 3 & 4 - \frac{5 + \sqrt{33}}{2} \end{bmatrix}$$

$$r(A_1) = 1$$

$$r(A_2) = 1$$

Przykłady c.d.

$$\dim \begin{pmatrix} \text{wektory} \\ \text{własne} \\ \text{wartości} \\ \text{własnej } \lambda_1 \end{pmatrix} = 1 \quad \dim \begin{pmatrix} \text{wektory} \\ \text{własne} \\ \text{wartości} \\ \text{własnej } \lambda_2 \end{pmatrix} = 1$$

$$0 \neq x_1 \in \ker A_1$$

$$0 \neq x_2 \in \ker A_2$$

Pokażemy, że x_1, x_2 tworzą bazę \mathbb{R}^2 . W tym celu udowodnimy, że x_1 i x_2 są liniowo niezależne.

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0 \quad /A$$

$$\alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2 = 0$$

Skoro: $A x_1 = \lambda_1 x_1, A x_2 = \lambda_2 x_2$, to:

$$\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \alpha_2 \lambda_2 x_2 = 0$$

$$A_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$A_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$A_1 x_1 = 0$$

$$A_1 x_2 = 0 \iff A x_2 = \lambda_1 x_2$$

Musimy pokazać, że $A_1 x_2 \neq 0$.

Lemat

$$A_1 x_2 \neq 0$$

Dowód lematu

Przypuśćmy, że $A_1 x_2 = 0 \iff Ax_2 = \lambda_1 x_2 \iff x_2 = (A - \lambda_1 I)x_2 = 1$
 $Ax_2 = \lambda_2 x_2 \implies \lambda_1 = \lambda_2$ - sprzeczność
 $Ax_2 = \lambda_1 x_2$

Podsumowanie

Macierz A w bazie x_1, x_2 :

$$\begin{aligned} Ax_1 &= \lambda_1 x_1 \\ Ax_2 &= \lambda_2 x_2 \end{aligned} \implies \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Uwaga

Szukanie pierwiastków (miejsc zerowych) wielomianu charakterystycznego nie jest banalne.

Przykład

$$y_1 = x_1 + 2x_2$$

$$y_2 = -x_1 + x_2$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ -1 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 3$$

$$\Delta < 0$$

Wprowadzenie

Niech $A : V \rightarrow V$ endomorfizm przestrzeni liniowej V , takiej że $\dim V < \infty$.

Macierz A w pewnej dowolnej bazie jest kwadratowa. Wartość własna endomorfizmu A jest to pierwiastek wielomianu charakterystycznego $p(\lambda)$ macierzy, gdzie $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

Pokazaliśmy, że $p(\lambda)$ nie zależy od wyboru bazy do przedstawienia macierzy A , co mówiąc inaczej oznacza, że $p(\lambda)$ jest związany tylko z endomorfizmem $A : V \rightarrow V$.

Wektorem własnym wartości własnej λ_0 ($p(\lambda_0) = 0$) nazywamy element przestrzeni rozwiązań układu równań jednorodnych: $(A - \lambda_0 I)X = 0$. Układ ten ma zawsze rozwiązanie, bo $\det(A - \lambda_0 I) = 0$.

Uwaga

- endomorfizm - homomorfizm z tej samej przestrzeni w siebie
- monomorfizm - homomorfizm różnowartościowy ("1 – 1")
- epimorfizm - homomorfizm będący surjekcją ("na")
- izomorfizm - homomorfizm "1 – 1" i "na"

Twierdzenie 19.1

Niech: $A : V \rightarrow V$, $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$, $\mathbb{K} = \mathbb{R} (\mathbb{C})$.

Niezerowe wektory własne w_1, w_2, \dots, w_m endomorfizmu A mające różne wartości własne są liniowo niezależne.

Dowód

Niech:

$$(*) \quad \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_m w_m = 0.$$

Wówczas $\forall_i \alpha_i = 0$,

$$\underbrace{w_i}_{\text{wektor własny}} \longleftrightarrow \underbrace{\lambda_i}_{\text{wartość własna}} \iff w_i \in V_{(\lambda_i)}$$

wektor własny wartość własna

Niech $i = 1$. Wówczas:

$$Aw_1 = \lambda_1 w_1 \iff (A - \lambda_1 I)w_1 = 0$$

$$(A - \lambda_1 I)(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_m w_m) = 0$$

$$\alpha_1 (A - \lambda_1 I)w_1 + \alpha_2 (A - \lambda_1 I)w_2 + \dots + \alpha_m (A - \lambda_1 I)w_m = 0$$

$$\text{Skoro } (A - \lambda_1 I)w_1 = 0, \text{ to } \alpha_2 (Aw_2 - \lambda_1 w_2) + \dots + \alpha_m (Aw_m - \lambda_1 w_m) = 0$$

Stąd:

$$\alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_1) w_2 + \dots + \alpha_m (\lambda_m - \lambda_1) w_m = 0$$

Ponieważ wartości własne są różne, to ostatnie równanie jest krótszą kombinacją liniową (*).

Definicja 19.2

Zbiór $\{v \in V \mid Av = \lambda_0 v\} = \ker(A - \lambda_0 I)$ nazywamy podprzestrzenią własną wartości własnej λ_0 i oznaczamy $V_{(\lambda_0)} \in V$.

Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) - 4 = 3 - 4\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 4\lambda - 1$$

Liczmy pierwiastki:

$$\Delta = 16 + 4 = 20, \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{5}$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{4-2\sqrt{5}}{2} = 2 - \sqrt{5} \\ \lambda_2 &= \frac{4+2\sqrt{5}}{2} = 2 + \sqrt{5} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{wartości własne } A$$

Przykład c.d.

$$\lambda_1 = 2 + \sqrt{5}$$

$$V(2 + \sqrt{5}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (2 + \sqrt{5})(x, y)\}$$

$$\begin{cases} x + 2y = (2 + \sqrt{5})x \\ 2x + 3y = (2 + \sqrt{5})y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-1 - \sqrt{5})x + 2y = 0 \\ 2x + (1 - \sqrt{5})y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})x \\ 2x + \frac{3}{2}x + \frac{3\sqrt{5}}{2}x - (2 + \sqrt{5})(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\det \begin{bmatrix} -1 - \sqrt{5} & 2 \\ 2 & 1 - \sqrt{5} \end{bmatrix} = 4 - 4 = 0$$

$$V_{(2+\sqrt{5})} = \alpha(1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}) - \text{prosta o równaniu } (-1 - \sqrt{5})x + 2y = 0$$

Przykład c.d.

$$\lambda_2 = 2 - \sqrt{5}$$

$$V_{(2-\sqrt{5})} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (2 - \sqrt{5})(x, y)\}$$

$$\begin{cases} x + 2y = (2 - \sqrt{5})x \\ 2x + 3y = (2 - \sqrt{5})y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-1 + \sqrt{5})x + 2y = 0 \\ 2x + (1 + \sqrt{5})y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})x \\ 2x + \frac{3}{2}x - \frac{3\sqrt{5}}{2}x - (2 - \sqrt{5})(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\det \begin{bmatrix} -1 + \sqrt{5} & 2 \\ 2 & 1 + \sqrt{5} \end{bmatrix} = 4 - 4 = 0$$

$$V_{(2-\sqrt{5})} = \alpha(1, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}) - \text{prosta o równaniu } (-1 + \sqrt{5})x + 2y = 0$$

Przykład c.d.

Jak wygląda endomorfizm $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ w bazie $(1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}), (1, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})$?

$$A(1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}) = (2 - \sqrt{5})(1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})$$

$$A(1, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}) = (2 + \sqrt{5})(1, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})$$

Endomorfizm A w tej bazie ma postać:

$$\begin{bmatrix} 2 + \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2 - \sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$A : V \rightarrow V$$

$\det(A - \lambda I) = p(\lambda)$ - wielomian charakterystyczny

Jeżeli działamy w ciele liczb zespolonych, to nasz wielomian rozkłada się na iloczyn wielomianów liniowych (\mathbb{C} jest algebraicznie domknięte, tzn. każdy wielomian ma pierwiastek).

W \mathbb{R} nie każdy wielomian ma pierwiastek.

Kilka prostych obserwacji

Niech $f : V \rightarrow V$ będzie odwzorowaniem liniowym, skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej V o rzeczywistej macierzy kwadratowej A . Załóżmy że, wielomian charakterystyczny: $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ ma stopień n .

Niech wszystkie jego pierwiastki są różne i niezerowe. Oznaczmy je przez $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Wówczas układ niezerowych wektorów własnych $w_i \in V_{(\lambda_i)}$ jest bazą n wymiarowej przestrzeni V .

Macierz A w bazie w_1, w_2, \dots, w_n jest diagonalna i ma postać:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Twierdzenie 19.3

Niech $A : V \rightarrow V$, $\dim_{\mathbb{R}} V = n$. Wówczas istnieje jedno- lub dwuwymiarowa podprzestrzeń $V_1 \subset V$, taka że $A(V_1) \subseteq V_1$.
(Innymi słowy istnieje podprzestrzeń $V_1 \subset V$, taka że $A(V_1) \subseteq V_1$ i $\dim V_1 = 1$ lub 2).

Dowód

Niech $p_A(\lambda)$ wielomian charakterystyczny macierzy A .

1. $p_A(\lambda)$ ma pierwiastek rzeczywisty

Niech to będzie λ_1 , czyli $p_A(\lambda_1) = 0$. Z definicji istnieje

$w \neq 0$, $w \in V_{(\lambda_1)}$.

$Aw = \lambda_1 w$.

W tym przypadku szukana $V_1 = \text{gen}\{w\}$.

Dowód c.d.

2. $p_A(\lambda)$ nie ma pierwiastków rzeczywistych.

Każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych jest iloczynem wielomianów liniowych lub kwadratowych.

λ_0 - pierwiastek $p_A(\lambda) \Rightarrow (\lambda - \lambda_0) | p_A(\lambda)$ (tw. Bezout).

Jeśli $p_A(\lambda_0) = 0$, to $p_A(\overline{\lambda_0}) = 0$

$(\lambda - \overline{\lambda_0})(\lambda - \lambda_0) = \lambda^2 - (\overline{\lambda_0} + \lambda_0)\lambda + \overline{\lambda_0}\lambda_0$ - dwumian kwadratowy

Niech $\lambda^0 = \alpha + \beta i$ pierwiastek zespolony $p_A(\lambda)$

(tzn. $p_A(\lambda^0) = 0$), zaś $A = [a_{ij}]$. Wtedy:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda^0)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda^0)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{n,n-1}x_{n-1} + (a_{nn} - \lambda^0)x_n = 0 \end{cases}$$

Dowód c.d.

Niech $(\xi_1^0 + \eta_1^0 i, \dots, \xi_n^0 + \eta_n^0 i)$ będzie rozwiązaniem powyższego jednorodnego układu równań.

$$A \begin{bmatrix} \xi_1^0 + \eta_1^0 i \\ \vdots \\ \xi_n^0 + \eta_n^0 i \end{bmatrix} = (\alpha + \beta i) \begin{bmatrix} \xi_1^0 + \eta_1^0 i \\ \vdots \\ \xi_n^0 + \eta_n^0 i \end{bmatrix}$$

$$A \begin{bmatrix} \xi_1^0 \\ \vdots \\ \xi_n^0 \end{bmatrix} + iA \begin{bmatrix} \eta_1^0 \\ \vdots \\ \eta_n^0 \end{bmatrix} =$$

$$= \alpha \begin{bmatrix} \xi_1^0 \\ \vdots \\ \xi_n^0 \end{bmatrix} + \alpha i \begin{bmatrix} \eta_1^0 \\ \vdots \\ \eta_n^0 \end{bmatrix} + \beta i \begin{bmatrix} \xi_1^0 \\ \vdots \\ \xi_n^0 \end{bmatrix} - \beta \begin{bmatrix} \eta_1^0 \\ \vdots \\ \eta_n^0 \end{bmatrix}.$$

Dowód c.d.

Porównujemy część urojoną i rzeczywistą

$$A \begin{bmatrix} \xi_1^0 \\ \vdots \\ \xi_n^0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} \xi_1^0 \\ \vdots \\ \xi_n^0 \end{bmatrix} - \beta \begin{bmatrix} \eta_1^0 \\ \vdots \\ \eta_n^0 \end{bmatrix}$$

$$A \begin{bmatrix} \eta_1^0 \\ \vdots \\ \eta_n^0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} \eta_1^0 \\ \vdots \\ \eta_n^0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} \xi_1^0 \\ \vdots \\ \xi_n^0 \end{bmatrix}$$

$$V_1 = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} \xi_1^0 \\ \vdots \\ \xi_n^0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \eta_1^0 \\ \vdots \\ \eta_n^0 \end{bmatrix} \right\}. \text{ Ponadto } \dim V_1 \leq 2.$$

Twierdzenie 19.4

Niech V – n – wymiarowa przestrzeń liniowa nad \mathbb{R} , zaś $A : V \rightarrow V$.
Wówczas istnieje $W \subset V$ taka, że $A(W) = W$ i $\dim W \leq 2$.

Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 2 & -\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 3 - \lambda \end{bmatrix} \underset{w_2 - w_1}{=} =$$

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 2 + \lambda & -\lambda - 2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 - \lambda \end{bmatrix} = (*)$$

Przykład c.d.

Rozwijamy względem drugiego wiersza:

$$(-1)^{1+2}(2 + \lambda) \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 - \lambda \end{bmatrix} +$$

$$(-1)^{2+2}(-\lambda - 2) \det \begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & 3 - \lambda \end{bmatrix} =$$

$$= (-2 - \lambda)(6 - 2\lambda - 1) + (-2 - \lambda)(-3\lambda + \lambda^2 - 1) =$$

$$= (-2 - \lambda)(5 - 2\lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 1) =$$

$$= (-2 - \lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) =$$

$$= -2\lambda^2 + 10\lambda - 8 - \lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 6\lambda - 8 =$$

$$= (\lambda + 2)(\lambda - 4)(\lambda - 1)$$

$$p(\lambda) = 0 \iff \lambda = -2 \vee \lambda = 4 \vee \lambda = 1$$

Wartości własne: $-2, 1, 4$

Przykład c.d.

Szukamy wektorów własnych.

- $\lambda = -2$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + 2y - z = 0 \\ 2x + 2y - z = 0 \\ -x - y + 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Wektor własny dla wartości własnej $\lambda = -2$, to $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Przykład c.d.

• $\lambda = 1$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y = 1 \\ 2x - y = 1 \\ z = \frac{1}{2}(x + y) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2y - 1 \\ 4y - 2 - y = 1 \\ z = \frac{1}{2}(x + y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

Wektor własny dla wartości własnej $\lambda = 1$, to $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Przykład c.d.

• $\lambda = 4$

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -4x + 2y - z = 0 \\ 2x - 4y - z = 0 \\ -x - y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -4x + 2y \\ z = 2x - 4y \\ z = -x - y \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} -4x + 2y = 2x - 4y \\ z = -x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x = 1 \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow$$

Wektor własny dla wartości własnej $\lambda = 4$, to $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Przykład c.d.

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = -2 - 1 - 1 - 2 = -6$$

$$v_1 = [1, -1, 0], v_2 = [1, 1, 1], v_3 = [1, 1, -2]$$

$$Av_1 = -2v_1$$

$$Av_2 = v_2$$

$$Av_3 = 4v_3$$

W bazie v_1, v_2, v_3 nasza macierz ma postać:

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Twierdzenie 20.1

Jeżeli macierz A jest symetryczna, tzn. $A^T = A$ i rzeczywista ($\forall 1 \leq i, j \leq n \ A_{ij} \in \mathbb{R}$), to wszystkie pierwiastki wielomianu charakterystycznego $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ są rzeczywiste.

Dowód

Niech: $A = [A_{ij}]$, $A_{ij} \in \mathbb{R}$

$1 \leq i, j \leq n$

$p_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

Niech λ będzie pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego macierzy A .

Pokażemy, że:

$$\bar{\lambda} = \lambda.$$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Dowód c.d.

Oznacza to, że układ równań $\sum_k (A_{ik} - \lambda \delta_{ik}) x_k = 0$, $i = 1, \dots, n$ ma niezerowe rozwiązanie

$$\iff (*) \begin{cases} (A_{11} - \lambda)x_1 + A_{12}x_2 + \dots + A_{1n}x_n = 0 \\ A_{21}x_1 + (A_{22} - \lambda)x_2 + \dots + A_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ A_{n1}x_1 + A_{n2}x_2 + \dots + (A_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases},$$

Natomiast: $\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$ to tzw. delta Kroneckera.

Ponieważ $p_A(\lambda) = 0$, więc $p_A(\bar{\lambda}) = 0$.

Niech (x_1, x_2, \dots, x_n) będzie niezerowym rozwiązaniem układu równań liniowych (*).

Udowodnimy, że liczby $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ są rozwiązaniami układu równań:

$$\sum_k (A_{ik} - \bar{\lambda} \delta_{ik}) \bar{x}_k = 0,$$

gdzie $i = 1, 2, \dots, n$.

Dowód c.d.

$$\begin{cases} (A_{11} - \bar{\lambda})\bar{x}_1 + A_{12}\bar{x}_2 + \dots + A_{1n}\bar{x}_n = 0 \\ A_{21}\bar{x}_1 + (A_{22} - \bar{\lambda})\bar{x}_2 + \dots + A_{2n}\bar{x}_n = 0 \\ \dots \\ A_{n1}\bar{x}_1 + A_{n2}\bar{x}_2 + \dots + (A_{nn} - \bar{\lambda})\bar{x}_n = 0 \end{cases}$$

Zatem:

$$\sum_k (A_{ik} - \bar{\lambda}\delta_{ik})\bar{x}_k = \sum_k (\overline{A_{ik} - \lambda\delta_{ik}})\bar{x}_k = \overline{\sum_k (A_{ik} - \lambda\delta_{ik})x_k} = 0$$

Stąd i z definicji wartości własnej: $Ax = \lambda x$ i $A\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x}$ lub

$$\sum_k A_{ik}x_k = \lambda x_i \mid \bar{x}_i, \sum_k A_{ik}\bar{x}_k = \bar{\lambda}\bar{x}_i \mid x_i$$
$$\begin{cases} A_{11}x_1 + \dots + A_{1n}x_n = \lambda x_1 \\ A_{21}x_1 + \dots + A_{2n}x_n = \lambda x_2 \\ \dots \\ A_{n1}x_1 + \dots + A_{nn}x_n = \lambda x_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_{11}\bar{x}_1 + \dots + A_{1n}\bar{x}_n = \bar{\lambda}\bar{x}_1 \\ A_{21}\bar{x}_1 + \dots + A_{2n}\bar{x}_n = \bar{\lambda}\bar{x}_2 \\ \dots \\ A_{n1}\bar{x}_1 + \dots + A_{nn}\bar{x}_n = \bar{\lambda}\bar{x}_n \end{cases}$$

Dowód c.d.

Dla $i = 1, \dots, n$

$$\sum_k A_{ik} x_k \bar{x}_i = \lambda |x_i|^2 i \sum_k A_{ik} \bar{x}_k x_i = \bar{\lambda} |x_i|^2$$

Stąd sumując "lewe strony"

$$\sum_{i,k} A_{ik} x_k \bar{x}_i = \sum_{i,k} A_{ik} \bar{x}_k x_i$$

i korzystając z faktu, że macierz jest symetryczna, $A_{ik} = A_{ki}$, oraz " $A_{ik} x_k \bar{x}_i = A_{ki} x_i \bar{x}_k$ " dostajemy, że:

$$\sum_{i,k} A_{ik} x_k \bar{x}_i = \sum_{i,k} A_{ik} \bar{x}_k x_i$$

$$\text{Stąd } \lambda \sum_i |x_i|^2 \stackrel{\Downarrow}{=} \bar{\lambda} \sum_i |x_i|^2$$

$\lambda = \bar{\lambda}$ co należało pokazać.

Przykłady

Macierz Pauliego:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = B^2 = C^2 = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 1$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w_1 = [1, 1]$$

$$\lambda_2 = -1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w_2 = [1, -1]$$

Przykłady c.d.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = [1, 1] \in V_1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = [-1, 1] = -1[1, -1] \in V_1$$

- $\det(B - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & -i \\ i & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - (-i)i = \lambda^2 - 1$

$$\lambda_{1/2} = \pm 1$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -i \\ i & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -x - iy = 0 \\ ix - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = ix \\ -x - i(ix) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x \\ y = ix \end{cases} \Rightarrow w_1 = [1, i]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Przykłady c.d.

$$\begin{cases} x - iy = 0 \\ ix + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -ix \\ x - i(-ix) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x \\ y = -ix \end{cases} \Rightarrow w_2 = [1, -i]$$

$$\bullet \det(C - \lambda I) = \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 0 & -1 - \lambda \end{bmatrix} = -(1 - \lambda)(1 + \lambda) = \lambda^2 - 1$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-2y = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$w_1 = [1, 0]$$

$$\lambda_2 = -1$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$w_2 = [0, 1]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [1, 0] \in V_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [0, -1] = -1[0, 1] \in V_3$$

Przykłady c.d.

$$\bullet \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & \alpha & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & \alpha & 4-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)[(2-\lambda)(4-\lambda) - \alpha] = \\ = (3-\lambda)[\lambda^2 - 6\lambda + (8-\alpha)]$$

$$\Delta = 36 - 32 + 4\alpha = 4 + 4\alpha = 4(1 + \alpha)$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{4(1 + \alpha)} = 2\sqrt{1 + \alpha}$$

$$\lambda_1 = 3$$

$$\lambda_2 = \frac{6 - 2\sqrt{1 + \alpha}}{2} = 3 - \sqrt{1 + \alpha}$$

$$\lambda_3 = \frac{6 + 2\sqrt{1 + \alpha}}{2} = 3 + \sqrt{1 + \alpha}$$

Przykłady c.d.

Zbadajmy przypadek $\alpha = -1$. Wielomian charakterystyczny macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

to $(x - 3)^3$. Niech $A' = (A - 3I)$. Mamy $(A')^2 \neq 0$ i $(A')^3 = 0$. Stąd ciąg wektorów $v = (0, 1, 0)$, $A'(v)$, $(A')^2(v)$ definiuje tzw. bazę cykliczną. Jest to najprostsza wersja rozkładu Jordana. Macierz Jordana ma postać

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Przykłady c.d.

$$\bullet A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 1$$

$$1 - \lambda^3 = 0 \Rightarrow (1 - \lambda)(1 + \lambda + \lambda^2) = 0$$

$$\Delta = 1 - 4 = -3 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{3}i$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}, \lambda_3 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

$$A^3 = I$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = I$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{array}{l} e_1 \rightarrow e_3 \rightarrow e_2 \rightarrow e_1 \\ e_2 \rightarrow e_1 \rightarrow e_3 \rightarrow e_2 \\ e_3 \rightarrow e_2 \rightarrow e_1 \rightarrow e_3 \end{array}$$

Przykłady c.d.

$$\bullet A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{array}{l} e_1 \rightarrow e_4 \rightarrow e_3 \rightarrow e_2 \rightarrow e_1 \\ e_2 \rightarrow e_1 \rightarrow e_4 \rightarrow e_3 \rightarrow e_2 \\ e_3 \rightarrow e_2 \rightarrow e_1 \rightarrow e_4 \rightarrow e_3 \\ e_4 \rightarrow e_3 \rightarrow e_2 \rightarrow e_1 \rightarrow e_4 \end{array}$$

$$A^4 = I$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - 1$$

$$\lambda^4 - 1 = 0 \Rightarrow (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - i)(\lambda + i) = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \quad V_{(1)} - 1\text{-wymiarowa}$$

$$\lambda_2 = -1, \quad V_{(-1)} - 1\text{-wymiarowa}$$

$$\lambda_3 = i, \quad V_{(i)} - 1\text{-wymiarowa}$$

$$\lambda_4 = -i, \quad V_{(-i)} - 1\text{-wymiarowa}$$

Wykład 22.

Niech $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ będzie bazą przestrzeni V i niech $\varphi : V \rightarrow V$ będzie homomorfizmem liniowym. Łatwo zobaczyć, że macierz φ jest diagonalna wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ są wektorami własnymi odwzorowania φ .

Definicja 22.1

Mówimy, że homomorfizm φ jest diagonalizowalny, jeśli istnieje baza przestrzeni V złożona z wektorów własnych homomorfizmu φ .

Stwierdzenie 22.2

Niech a_1, \dots, a_k będą różnymi wartościami własnymi homomorfizmu $\varphi : V \rightarrow V$. Dla każdego $i = 1, 2, \dots, k$ niech $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{im_i}$ będzie liniowo niezależnym układem wektorów w $V_{(a_i)}$. Wówczas układ

$$\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{1m_1}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{2m_2}, \dots, \alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \dots, \alpha_{km_k}$$

jest liniowo niezależny.

Lemat 22.3

Niech a_1, a_2, \dots, a_k będą różnymi wartościami własnymi. Niech $\beta_i \in V_{(a_i)}$, jeżeli $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_k = 0$ to $\beta_i = 0, i = 1, 2, 3, \dots, k$.

Dowód Lematu: (Patrz twierdzenie 19.1.) Indukcja po k . Dla $k = 1$ oczywiste. Załóżmy dla $k := k - 1$. Z założenia mamy dwie równości:

$$\varphi(\sum_{i=1}^k \beta_i) = \sum_{i=1}^k a_i \beta_i = 0$$

$$a_1(\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_k) = a_1\beta_1 + a_1\beta_2 + \dots + a_1\beta_k = 0.$$

Po ich odjęciu otrzymujemy

$$(a_2 - a_1)\beta_2 + \dots + (a_k - a_1)\beta_k = 0.$$

Stąd $(a_i - a_1)\beta_i \in V_{(a_i)}, i = 2, \dots, k$. Z założenia indukcyjnego dla $i = 2, 3, \dots, k, \beta_2 = \beta_3 = \dots = \beta_k = 0$. Ponieważ $\sum_{i=1}^k \beta_i = 0$, więc $\beta_1 = 0$.

Kontynuujemy dowód Stwierdzenia. Napiszmy kombinację liniową wektorów z przyrównaniem jej do zera:

$$a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{12} + \dots + a_{1m_1}\alpha_{1m_1} + a_{21}\alpha_{21} + \dots + a_{k1}\alpha_{k1} + \dots + a_{km_k}\alpha_{km_k} = 0$$

Stosując powyższy lemat dla $\beta_i = \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\alpha_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, k$ i wykorzystując liniową niezależność wektorów $\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{im_i}$ dla $i = 1, 2, \dots, k$ otrzymujemy tezę dowodzonego Stwierdzenia.

Twierdzenie 22.4

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową i niech φ będzie homomorfizmem przestrzeni V . Niech a_1, a_2, \dots, a_k będą wszystkimi różnymi, wartościami własnymi homomorfizmu φ . Wówczas:

- $\sum_{i=1}^k \dim V_{(a_i)} \leq \dim V$.
- *Homomorfizm φ jest diagonalizowalny wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi równość $\sum_{i=1}^k \dim V_{(a_i)} = \dim V$.*

Dowód: Z ostatniego lematu wektory

$$\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{1m_1}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{2m_2}, \dots, \alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \dots, \alpha_{km_k} \quad (1)$$

są liniowo niezależne. Stąd $\sum_{i=1}^k \dim V_{(a_i)} = \sum_{i=1}^k m_i \leq \dim V$. Ponadto, jeśli $\sum_{i=1}^k \dim V_{(a_i)} = \dim V$, to układ wektorów (1) jest bazą składającą się z wektorów własnych i stąd φ jest diagonalizowalny.

Założmy teraz, że φ jest diagonalizowalny. To znaczy istnieje baza \mathcal{A} złożona z wektorów własnych homomorfizmu φ . Niech $\mathcal{A}_i = \mathcal{A} \cap V_{(a_i)}$ oraz $|\mathcal{A}_i| = m_i$. Mamy $\sum_{i=1}^k m_i = \dim V$ oraz $\forall i, 1 \leq i \leq k, m_i \leq \dim V_{(a_i)}$.

$$\dim V = \sum_{i=1}^k m_i \leq \sum_{i=1}^k \dim V_{(a_i)} \leq \dim V.$$

Podsumowując $\sum_{i=1}^k \dim V_{(a_i)} = \dim V$.

Przykłady

1. $V = \mathbb{R}^2, \varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \varphi(x_1, x_2) = (2x_1 + 3x_2, 4x_1 + 3x_2)$ W bazie standardowej macierz $\varphi = A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$. Wartości własne macierzy A to zbiór $\{6, -1\}$. Ponadto $\dim V_{(6)} = \dim V_{(-1)} = 1$. Przykładowa baza wektorów własnych to $[3, 4] \in V_{(6)}, [1, -1] \in V_{(-1)}$. Diagonalna macierz

$$\varphi = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. $\varphi(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$. W bazie standardowej macierz

$$\varphi = A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \text{ Wielomian charakterystyczny to } p_A(\lambda) = \lambda^2 + 1. \varphi$$

nie ma rzeczywistych wartości własnych. Nie jest diagonalizowalny.

3. $\varphi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2, \varphi(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$. Wartości własne to $i, -i$. Ponadto $(-1, i) \in V_{(i)}, (1, i) \in V_{(-i)}$. $\dim V_{(i)} = \dim V_{(-i)} = 1$. Macierz

$$\text{diagonalna } \varphi = A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

4. $\varphi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2, \varphi(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_2)$. Macierz w bazie standardowej ma postać $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Wielomian charakterystyczny to $p(\lambda) = (\lambda - 1)^2$.

Wymiar przestrzeni $V_{(1)}$ jest równy $1 \neq 2 = \dim \mathbb{C}^2$. zatem φ nie jest diagonalizowalny. Zakończmy ten wykład

Definicja 22.5

Macierz $A \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ nazywamy diagonalizowalną nad ciałem K , jeśli istnieje macierz odwracalna $C \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ (tzn. $\det C \neq 0$.) taka, że $C^{-1}AC$ jest macierzą diagonalną.

Łatwo zobaczyć że A diagonalizowalna wtedy i tylko, wtedy gdy odpowiadający jej homomorfizm jest diagonalizowalny.

Wykład 23.

Niech A oznacza $n \times n$ macierz zespoloną. Niech V oznacza przestrzeń liniową nad \mathbb{C} wymiaru n .

Definicja 23.1

Podprzestrzeń liniową przestrzeni V nazywamy *cykliczną* o ile ma następującą postać $\text{gen}\{v, (A - \lambda)v, \dots, (A - \lambda)^{m-1}v\}$ i $(A - \lambda)^{m-1}v \neq 0$ i $(A - \lambda)^m v = 0$.

Ponieważ $A(A - \lambda)^k = (A - \lambda + \lambda)(A - \lambda)^k = (A - \lambda)^{k+1} + \lambda(A - \lambda)^k$, więc podprzestrzeń *cykliczna* jest A niezmiennicza. Ponadto mamy

Lemat 1

Generatory przestrzeni *cyklicznej* są liniowo niezależne.

Dowód:

Niech dla pewnego r ($r = 0, 1, \dots, m - 1$)

$$c_r(A - \lambda)^r v + \dots + c_{m-1}(A - \lambda)^{m-1} v = 0$$

i $c_r \neq 0$, wówczas mnożąc obydwie strony równości przez $(A - \lambda)^{m-r-1}$ dostajemy równość

$$c_r(A - \lambda)^{m-1} v = 0.$$

Stąd $c_r = 0$ i mamy sprzeczność.

Lemat 2

Niech $V = H \oplus \text{gen}\{v, Av, \dots, A^{m-1}v\}$ i $A^{m-1}v \neq 0$ oraz $A^m v = 0$.
Założmy ponadto, że $A(H) \subset H$ i $A^m H = \{0\}$. Niech $h \in H$ i $v' = v + h$.
Wówczas $V = H \oplus \text{gen}\{v', Av', \dots, A^{m-1}v'\}$ i $A^{m-1}v' \neq 0$ oraz $A^m v' = 0$.

Dowód: Wystarczy zauważyć, że jeżeli liniowa kombinacja wektorów $v', Av', \dots, A^{m-1}v'$ należy do H to ta sama liniowa kombinacja $v, Av, \dots, A^{m-1}v$ należy także do H .

Twierdzenie 23.2

(Tw. Jordana o rozkładzie na klatki) Niech $V \neq 0$, będzie skończenie wymiarową przestrzenią nad ciałem liczb zespolonych i $A : V \rightarrow V$ odwzorowaniem liniowym. Wówczas V może być rozłożona na sumę prostą podprzestrzeni cyklicznych.

Dowód: Indukcja względem wymiaru przestrzeni V . Rozkład jest trywialny dla $\dim V = 1$. Przypuśćmy, że rozkład istnieje dla przestrzeni wymiaru $n - 1$. Niech $\dim V = n$. Rozważmy najpierw przypadek $\det A = 0$. Wtedy wymiar $\text{Im} A$ jest $\leq (n - 1)$. Niech F będzie $(n - 1)$ wymiarową podprzestrzenią V zawierającą $\text{Im} A$. Ponieważ $AF \subset \text{Im} A \subset F$, więc z założenia indukcyjnego istnieje rozkład F na sumę prostą podprzestrzeni cyklicznych

$$M_j = \text{gen}\{v_j, (A - \lambda_j)v_j, \dots, (A - \lambda_j)^{m_j-1}v_j\}, 1 \leq j \leq k.$$

Indeksy są wybrane tak, że $\dim M_j \leq \dim M_{j+1}, 1 \leq j \leq k - 1$.

Lemat 3

Niech

$$S = \{j \mid \lambda_j = 0\}$$

i $g \notin F$. Wówczas Ag ma postać

$$Ag = \sum_{j \in S} \alpha_j v_j + Ah, h \in F, \quad (2)$$

o ile $S \neq \emptyset$. Jeżeli $S = \emptyset$, to $Ag = Ah$.

Dowód:

Zauważmy, że $Ag \in \text{Im}A \subset F$. Stąd Ag jest liniową kombinacją wektorów postaci $(A - \lambda_j)^q v_j$, $0 \leq q \leq m_j - 1$, $1 \leq j \leq k$. Dla $\lambda_j = 0$, wektory $Av_j, \dots, A^{m_j-1}v_j$, są zawarte w $A(F)$. Jeżeli $\lambda_j \neq 0$, to z "rozpisania dwumianowego" wyrażenia $(A - \lambda_j)^{m_j} v_j = 0$ otrzymujemy, że v_j ma postać $\sum_{m=1}^{m_j} b_m A^m v_j$. Zatem wszystkie wektory $(A - \lambda_j)^q v_j$ należą do $A(F)$ i lemat jest udowodniony.

Niech $g_1 = g - h$, gdzie h zdefiniowane zostało powyżej w równaniu (2).
Ponieważ $g \notin F$ i $h \in F$, więc $g_1 \notin F$ oraz z (2)

$$Ag_1 = \sum_{j \in S} \alpha_j v_j. \quad (3)$$

W przypadku gdy $Ag_1 = 0$, $\text{gen}\{g_1\}$ jest *cykliczna* i $V = F \oplus \text{gen}\{g_1\}$.
Założmy, więc, że $Ag_1 \neq 0$. Niech p oznacza największą liczbę całkowitą j
w równaniu (3) dla której $\alpha_j \neq 0$.

Wówczas dla $\tilde{g} = (1/\alpha_p)g_1$

$$A\tilde{g} = v_p + \sum_{j \in S, j < p} \frac{\alpha_j}{\alpha_p} v_j. \quad (4)$$

Zdefiniujmy

$$H = \sum_{j \in S, j < p} \oplus M_j.$$

H jest A -niezmiennicza i ponadto z nierówności $\dim M_j \leq \dim M_p, j < p$ wynika że $A^{m_p}(H) = \{0\}$. Wykorzystując Lemat 2 dla $H \oplus M_p$ wraz z nierównością (4) dostajemy

$$H \oplus M_p = H \oplus \text{gen}\{A\tilde{g}, \dots, A^{m_p}\tilde{g}\}.$$

Stąd

$$F = \sum_{j \neq p} \oplus M_j \oplus \text{gen}\{A\tilde{g}, \dots, A^{m_p}\tilde{g}\}.$$

Ponieważ $\tilde{g} \notin F$, więc

$$V = F \oplus \text{gen}\{\tilde{g}\} = \sum_{j \neq p} \oplus M_j \oplus \text{gen}\{\tilde{g}, A\tilde{g}, \dots, A^{m_p}\tilde{g}\}.$$

To kończy dowód dla $\det A = 0$. W ogólnym przypadku, dla wartości własnej μ mamy $\det(A - \mu I) = 0$ i otrzymujemy szukany rozkład V .

Definicja 24.1

Niech V przestrzeń liniowa nad \mathbb{R} (skończenie wymiarowa). Iloczynem skalarnym nazywamy odwzorowanie $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, które jest:

- symetryczne: $\forall x, y \in V \quad \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- dwuliniowe: $\forall x, y, z \in V \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$
- dodatnio określone: $\forall x \in V, x \neq 0 \quad \langle x, x \rangle > 0$

Definicja 24.2

Przestrzenią euklidesową nazywamy parę $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, gdzie V to przestrzeń liniowa nad \mathbb{R} , zaś $\langle \cdot, \cdot \rangle$ to iloczyn skalarny (czyli odwzorowanie symetryczne, dwuliniowe, dodatnio określone).

Przykłady

- $(\mathbb{R}^n, \langle, \rangle)$
 $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
 $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$
 $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$
- $C[0, 1] = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ciągła}\}$
 $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$
 $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$
 $\langle f, g \rangle = \int_0^1 fg dx$

Definicja 24.3

Normę wektora $x \in V$ definiujemy jako: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Definicja 24.4

Niech $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}^n)$. Śladem macierzy $A = [a_{ij}]$ nazywamy liczbę $\text{tr}(A) = \sum_1^n a_{ii}$.

Łatwo zobaczyć, że dla $A, B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}^n)$, $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ oraz $\text{tr}(A) = \text{tr}(A^T)$ gdzie A^T oznacza macierz transponowaną. Definiujemy iloczyn skalarny jak $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^T)$. Stąd możemy sformułować następujące

Stwierzenie 24.5

Jeżeli $\text{tr}(AA^T + BB^T) = \text{tr}(AB + A^T B^T)$ to $A = B^T$.

Dowód

$0 \leq \langle A - B^T, A - B^T \rangle = \langle A, A \rangle - \langle A, B^T \rangle - \langle B^T, A \rangle + \langle B^T, B^T \rangle = \text{tr}(AA^T) + \text{tr}(B^T B) - \text{tr}(AB) - \text{tr}(B^T A^T) = 0$. Stąd $A = B^T$.

Definicja 24.6

Niech X będzie dowolnym zbiorem. Funkcję $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ nazywamy metryką, o ile spełnia:

- 1 $\forall x, y \in X \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$
- 2 $\forall x, y \in X \quad d(x, y) = d(y, x)$
- 3 $\forall x, y, z \in X \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Parę (X, d) nazywamy przestrzenią metryczną.

Przykłady

- $x, y, \in \mathbb{R}^n$

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$$

- X – dowolny zbiór

$$\forall x, y \in X \quad d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x \neq y \\ 0 & \text{gdy } x = y \end{cases}$$

Jest to metryka dyskretna.

Twierdzenie 24.7 (Nierówność Schwartza)

$$\forall x, y \in V \quad \langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\|$$

Dowód

$$\forall x, y \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle \geq 0$$

$$\langle x - \lambda y, x \rangle - \langle x - \lambda y, \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle - \lambda \langle y, x \rangle - \lambda \langle x - \lambda y, y \rangle =$$

$$\langle x, x \rangle - \lambda \langle x, y \rangle - \lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle = \lambda^2 \langle y, y \rangle - 2\lambda \langle x, y \rangle + \langle x, x \rangle \quad \Delta \leq 0$$

$$\Delta = 4 \langle x, y \rangle^2 - 4 \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

$$4 \langle x, y \rangle^2 - 4 \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \leq 0$$

$$4 \langle x, y \rangle^2 \leq 4 \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

$$\langle x, y \rangle \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle} = \|x\| \|y\|.$$

Uwaga

Iloczyn skalarny definiuje metrykę na przestrzeni euklidesowej.

Metryka $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ dana wzorem:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}, \text{ spełnia:}$$

- 1 $\forall_{x, y \in V} d(x, y) = 0 \iff x = y$
- 2 $\forall_{x, y \in V} d(x, y) = d(y, x)$
- 3 $\forall_{x, y, z \in V} d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Dowód uwagi

$$\text{ad. 1. } d(x, y) = 0 \iff x = y$$

$$\|x - y\| = 0 \iff x = y$$

$$\text{"} \Leftarrow \text{" } x = y \Rightarrow \|x - y\| = \|x - x\| = 0$$

$$\text{"} \Rightarrow \text{" } \|x - y\| = 0 = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = 0 \iff \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 = 0 \Rightarrow x = y,$$

Dowód uwagi c.d.

ad. 2. Udowodnijmy najpierw własność: $\forall_{x \in V} \forall_{\alpha \in R} \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.

Istotnie: $\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x \rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle x, x \rangle} = |\alpha| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\alpha| \|x\|$.

Stąd możemy wykazać warunek 2.

$$\|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1| \|y - x\| = \|y - x\|.$$

ad. 3. Nierówność trójkąta

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

$$\|x - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\|$$

Sformułujmy i udowodnijmy lemat:

Lemat

$$\forall_{x, y \in V} \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Dowód lematu

Skorzystamy z nierówności Schwartza:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2 \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + 2 \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \Rightarrow \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|. \end{aligned}$$

Dowód uwagi c.d.

$$\text{Zatem: } \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\|.$$

Definicja 24.8

Niech V - przestrzeń euklidesowa z bazą a_1, \dots, a_n . Mówimy, że baza jest:

- ortonormalna, gdy $\langle a_i, a_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{gdy } i \neq j \\ 1 & \text{gdy } i = j \end{cases}$
- ortogonalna, gdy $\langle a_i, a_j \rangle = 0$ dla $i \neq j$

Definicja 24.9

Dwa wektory $a, b \in V$ są ortogonalne, gdy $\langle a, b \rangle = 0$.

Definicja 24.10

Niech $a, b \in V$. Wtedy:

$$\cos(\angle(a, b)) = \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \|b\|} \leq 1$$

Stwierdzenie 24.11

Niech $a_1, \dots, a_n \in V$ wektory bazy ortogonalnej. Wtedy baza: $\frac{a_i}{\|a_i\|}$ jest ortonormalna.

Dowód

$$\forall i, j \left\langle \frac{a_i}{\|a_i\|}, \frac{a_j}{\|a_j\|} \right\rangle = \frac{1}{\|a_i\| \|a_j\|} \langle a_i, a_j \rangle = 0, \text{ gdy } i \neq j$$

$$\text{Gdy } i = j, \text{ to: } \left\langle \frac{a_i}{\|a_i\|}, \frac{a_i}{\|a_i\|} \right\rangle = \frac{1}{\|a_i\|^2} \langle a_i, a_i \rangle = \frac{1}{\langle a_i, a_i \rangle} \langle a_i, a_i \rangle = 1.$$

Stwierdzenie 24.12

Niech $a_1, \dots, a_n \in V$ baza ortonormalna. Wtedy:

$$\forall x \in V \quad x = \langle x, a_1 \rangle a_1 + \dots + \langle x, a_n \rangle a_n$$

Dowód

Niech $x = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n$

Wtedy:

$$\begin{aligned} \langle x, a_j \rangle &= \langle \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n, a_j \rangle = \\ &= \alpha_1 \langle a_1, a_j \rangle + \dots + \alpha_j \langle a_j, a_j \rangle + \dots + \alpha_n \langle a_n, a_j \rangle = \\ &= \alpha_j \langle a_j, a_j \rangle = \alpha_j \end{aligned}$$

Twierdzenie 24.13 (Ortonormalizacja Grama-Schmidta)

Niech $\{v_1, \dots, v_n\}$ - dowolna baza V zaś $\{u_1, \dots, u_n\}$ - baza ortonormalna.

$$v'_1 = v_1$$

$$v'_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, v'_1 \rangle}{\langle v'_1, v'_1 \rangle} v'_1$$

$$v'_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, v'_1 \rangle}{\langle v'_1, v'_1 \rangle} v'_1 - \frac{\langle v_3, v'_2 \rangle}{\langle v'_2, v'_2 \rangle} v'_2$$

...

$$v'_n = v_n - \frac{\langle v_n, v'_1 \rangle}{\langle v'_1, v'_1 \rangle} v'_1 - \frac{\langle v_n, v'_2 \rangle}{\langle v'_2, v'_2 \rangle} v'_2 - \dots - \frac{\langle v_n, v'_{n-1} \rangle}{\langle v'_{n-1}, v'_{n-1} \rangle} v'_{n-1}$$

W ten sposób uzyskujemy bazę ortogonalną.

Aby ją zortonormalizować, należy każdy, uzyskany w ortogonalizacji wektor, podzielić przez jego normę:

$$u_1 = \frac{v'_1}{\|v'_1\|}, u_2 = \frac{v'_2}{\|v'_2\|}, \dots, u_n = \frac{v'_n}{\|v'_n\|}$$

Wektory u_1, u_2, \dots, u_n są ortonormalne.

Dowód

Należy pokazać, że każdy wektor v'_r jest prostopadły do wektora u_i , dla $i = 1, \dots, r - 1$, tzn.

$$\langle v'_r, u_i \rangle = 0.$$

Policzmy:

$$\begin{aligned} \langle v'_r, u_i \rangle &= \\ &= \left\langle v_r - \frac{\langle v_r, v'_1 \rangle}{\langle v'_1, v'_1 \rangle} v'_1 - \frac{\langle v_r, v'_2 \rangle}{\langle v'_2, v'_2 \rangle} v'_2 - \dots - \frac{\langle v_r, v'_{r-1} \rangle}{\langle v'_{r-1}, v'_{r-1} \rangle} v'_{r-1}, u_i \right\rangle = \\ &= \langle v_r, u_i \rangle - \langle v_r, u_i \rangle = 0 \end{aligned}$$

Ćwiczenie

- 1 Zortonormalizować bazę $\{(5, 6), (3, 5)\}$ w \mathbb{R}^2
- 2 Zortonormalizować bazę $\{(5, 6, 1), (3, 5, 1), (8, 11, 0)\}$ w \mathbb{R}^3 .

Rozwiązanie ćwiczenia

Zortonormalizować bazę $\{(5, 6), (3, 5)\}$ w \mathbb{R}^2

$$v'_1 = (5, 6)$$

$$\begin{aligned} v'_2 &= (3, 5) - \frac{\langle (3,5), (5,6) \rangle}{\langle (5,6), (5,6) \rangle} (5, 6) = (3, 5) - \frac{15+30}{25+36} (5, 6) = \\ &= (3, 5) - \frac{45}{61} (5, 6) = (3, 5) - \left(\frac{225}{61}, \frac{270}{61}\right) = \left(-\frac{42}{61}, \frac{35}{61}\right) = \frac{7}{61}(-6, 5) \end{aligned}$$

$$u_1 = \frac{(5,6)}{\sqrt{25+36}}$$

$$u_2 = \frac{\frac{7}{61}(-6,5)}{\frac{7}{61}\sqrt{36+25}} = \frac{(-6,5)}{\sqrt{61}}$$

Zadanie domowe

Zortonormalizować bazę $\{(5, 6, 1), (3, 5, 1), (8, 11, 0)\}$ w \mathbb{R}^3 .

Rozwiązanie przynieść na kartce.

Definicja 25.1

Niech V – przestrzeń euklidesowa, $W \subset V$ podprzestrzeń liniowa, e_1, \dots, e_n – ortogonalna baza przestrzeni V . Podprzestrzeń liniową:

$$W^\perp = \{x \in V \mid \forall y \in W \langle x, y \rangle = 0\}$$

nazywamy ortogonalnym dopełnieniem podprzestrzeni $W \subset V$ przestrzeni V .

Uwaga

W^\perp jest podprzestrzenią liniową V .

$$W^\perp = \{x \in V \mid \forall y \in W \langle x, y \rangle = 0\}$$

$$\begin{aligned} \forall v_1, v_2 \in W \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \quad \forall y \in W \quad \langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, y \rangle &= \\ = \alpha_1 \langle v_1, y \rangle + \alpha_2 \langle v_2, y \rangle &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

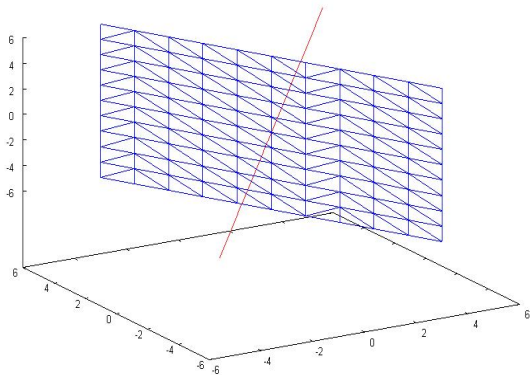
Przykład

$$V = \mathbb{R}^3$$

Niech W – dowolna prosta w \mathbb{R}^3 przechodząca przez $(0, 0, 0)$.

Czym jest W^\perp ?

Jest to płaszczyzna prostopadła do prostej W .



Przykłady

$$V = \mathbb{R}^2$$

- $W = \{(0, 0)\}$
 $W^\perp = \mathbb{R}^2$

- $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax\}$
 $W^\perp = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -\frac{1}{a}x\}$
 $\langle (x, ax), (x, -\frac{1}{a}x) \rangle = x^2 - x^2 = 0$

Obserwacja

W \mathbb{R}^2 dowolna prosta jest dopełnieniem ortogonalnym innej prostej.

Stwierdzenie 25.2

Niech (V, \langle, \rangle) będzie przestrzenią euklidesową. Wówczas dowolna podprzestrzeń $W \subset V$ jest dopełnieniem ortogonalnym podprzestrzeni W^\perp . Wymiar W^\perp jest równy $\dim V - \dim W$, tj.

$$\dim W^\perp = \dim V - \dim W.$$

Dowód

Pokażemy, że $W^\perp \cap W = \{0\}$.

Niech $x \in W$ i $\forall y \in W \langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$.

Niech $\{f_1, \dots, f_k\}$ będzie bazą W .

Ze stwierdzenia o dopełnieniu dowolnej bazy podprzestrzeni do całej bazy, wynika stwierdzenie o wymiarach.

Uwaga

Niech

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

będzie równaniem dowolnej płaszczyzny w \mathbb{R}^3 . Dokonując jej równoległego przesunięcia o D otrzymujemy płaszczyznę przechodzącą przez $(0, 0, 0)$. Jej równanie jest postaci:

$$Ax + By + Cz = 0.$$

Stąd:

$$\begin{aligned} & \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid Ax + By + Cz = 0\} = \\ & = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \langle (x, y, z), (A, B, C) \rangle = 0\} = \\ & = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z) = t(A, B, C), t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Definicja 25.3

Niech V będzie dowolną przestrzenią liniową skończenie wymiarową nad ciałem \mathbb{K} . Niech V_1, V_2 będą podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni V . Mówimy, że V jest sumą prostą swoich podprzestrzeni V_1, V_2 wtedy i tylko wtedy, gdy:

- 1 $V = V_1 + V_2 = \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$
- 2 $V_1 \cap V_2 = \{0\}$

Piszemy: $V = V_1 \oplus V_2$.

Przykład

Niech V – przestrzeń euklidesowa, $W \subset V$ podprzestrzeń. Wtedy:

$$W^\perp \oplus W = V.$$

$$W^\perp \cap W = \{0\}.$$

Lemat 25.4

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2).$$

Dowód

$(V_1 \cap V_2)$ jest podprzestrzenią przestrzeni V_1 i V_2 . Z Twierdzenia 4.3 (Steinitza) każdą bazę przestrzeni $V_1 \cap V_2$ można uzupełnić do baz przestrzeni V_1 i V_2 . Stąd i z definicji wymiaru łatwo wynika nasz Lemat.

Definicja 25.5

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad \mathbb{C} . Iloczynem hermitowskim nazywamy odwzorowanie $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$, dane wzorem:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i,$$

które jest:

- 1 liniowe na pierwszej współrzędnej, tj.:

$$\forall_{x,y,z \in V} \forall_{\alpha, \beta \in \mathbb{C}} \langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$$

- 2 $\forall_{x,y \in V} \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

- 3 $\forall_{x \in V} \langle x, x \rangle \geq 0$.

Parę $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ nazywamy przestrzenią hermitowską lub unitarną.

Przykład

$$V = \mathbb{C}^n, x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n, y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$$

Definicja 26.1

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem \mathbb{K} . Odwzorowanie $a : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ nazywamy formą dwuliniową, jeśli jest:

- liniowa na każdej współrzędnej, tj.

$$\forall_{x,y,z \in V} \forall_{\alpha,\beta \in \mathbb{K}} a(\alpha x + \beta y, z) = \alpha a(x, z) + \beta a(y, z)$$

$$\forall_{x,y,z \in V} \forall_{\alpha,\beta \in \mathbb{K}} a(z, \alpha x + \beta y) = \alpha a(z, x) + \beta a(z, y)$$

Jeśli:

$$\forall_{x,y \in V} a(x, y) = a(y, x)$$

to formę tę nazywamy symetryczną.

Jeśli zaś:

$$\forall_{x,y \in V} a(x, y) = -a(y, x)$$

to formę tę nazywamy antysymetryczną.

Stwierdzenie 26.2

Każda forma kwadratowa nad ciałem \mathbb{R} jest sumą formy symetrycznej i antysymetrycznej.

Dowód

$$a(x, y) = \frac{1}{2} \underbrace{\left(a(x, y) + a(y, x) \right)}_{\text{symetryczna}} + \frac{1}{2} \underbrace{\left(a(x, y) - a(y, x) \right)}_{\text{antysymetryczna}}$$

Definicja 26.3

Niech $a : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ forma dwuliniową, (e_1, \dots, e_n) - baza przestrzeni V .
Macierz $A = [a(e_i, e_j)]_{i,j=1,\dots,n}$ nazywamy macierzą formy dwuliniowej a .

Przykład

Każda macierz kwadratowa definiuje formę dwuliniową.

Postać

Każdą symetryczną formę dwuliniową można zapisać w postaci

$$a(x, y) = \sum_{i < k} a_{ik}(x_i y_k + x_k y_i) + \sum_i a_{ii} x_i y_i.$$

Natomiast forma antysymetryczna ma postać

$$a(x, y) = \sum_{i < k} a_{ik}(x_i y_k - x_k y_i).$$

Ćwiczenie

Definicja 26.4

Rzędem formy dwuliniowej nazywamy rząd jej macierzy.

Definicja 26.5

Niech $a : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ będzie formą kwadratową symetryczną. Odwzorowanie $x \mapsto a(x, x)$ nazywamy formą kwadratową formy a .

Przykład

$$V = C[0, 1] = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ - ciągła}\}$$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$\alpha f(x) = \alpha(f(x))$$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 fg dx$$

Obserwacja

$f(x) = a(x, x)$ - forma kwadratowa

$$a(x, y) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{2}[f(x+y) - f(x) - f(y)]$$

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{1n}x_1x_n$$

Macierz formy kwadratowej \equiv macierz odpowiadającej jej formy symetrycznej

rząd macierzy kwadratowej \equiv rząd macierzy odpowiadającej jej formy symetrycznej

Definicja 26.6

Jeżeli w pewnej bazie wszystkie współczynniki $a_{ik} = 0$ dla $i \neq k$, to mówimy, że w tej bazie forma kwadratowa ma postać kanoniczną:

$$f(x) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2.$$

Sprowadzanie form kwadratowych do postaci kanonicznej metodą Lagrange'a

$$f(x, y, z) = 2x^2 + 7y^2 + 2z^2 - 4xy - 10yz$$

Przekształcamy sumę wszystkich składników zawierających x , za pomocą metody uzupełniania do pełnego kwadratu:

$$2x^2 - 4xy = 2(x^2 - 2xy) = 2((x - y)^2 - y^2)$$

Podstawiamy to wyrażenie do wyjściowej formy:

$$f(x, y, z) = 7y^2 + 2z^2 - 10yz + 2(x - y)^2 - 2y^2 = 5y^2 + 2z^2 - 10yz + 2(x - y)^2$$

Podobnie postępujemy teraz z y, z :

$$5y^2 + 2z^2 - 10yz = 5(y^2 - 2yz + z^2) - 5z^2 + 2z^2 = 5(y - z)^2 - 3z^2 = 5(y - z)^2 - 3z^2$$

Podstawiamy znów powyższą wartość do formy:

$$f(x, y, z) = 5(y - z)^2 - 3z^2 + 2(x - y)^2$$

$$\text{Niech: } \begin{cases} x - y = x' \\ y - z = y' \\ z = z' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' + y' + z' \\ y = y' + z' \\ z = z' \end{cases}$$

$$\text{Zatem: } f(x, y, z) = 2x'^2 + 5y'^2 + z'^2.$$

Uwaga

Powyższa metoda nie jest jednoznaczna, tzn. w przypadku innego grupowania, otrzymamy różne postaci kanoniczne tej samej formy kwadratowej. Jednak liczby dodatnich i ujemnych współczynników, stojących przy pełnych kwadratach, są w każdym przypadku jednakowe.

Twierdzenie 26.7 (Metoda Lagrange'a)

Każdą formę kwadratową można sprowadzić do postaci kanonicznej za pomocą niezdegenerowanego przekształcenia liniowego.
(niezdegenerowany \equiv o wyznaczniku $\neq 0$)

Dowód

Indukcja po n .

Dla $n = 1$ oczywiste, bo forma kwadratowa jednej zmiennej ma postać ax_1^2 , gdzie $a \in \mathbb{R}$.

1) $\exists_{1 \leq i \leq n} a_{ii} \neq 0$.

Bez starty ogólności (przenumerowując bazę) możemy przyjąć, że $i = 1$.

Dowód c.d.

Wtedy:

$$f(x) = a(x, x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + g(x_2, \dots, x_n)$$

Zamiana zmiennych

Niech: $y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n$, $y_2 = x_2, \dots, y_n = x_n$.

Wtedy:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_{11}}y_1^2 &= \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)^2 = \\ &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + \varphi(x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

φ - forma kwadratowa niezawierająca zmiennej x_1

$$\psi(x_2, \dots, x_n) = g(x_2, \dots, x_n) - \varphi(x_2, \dots, x_n)$$

Stąd:

$$f(x) = \frac{1}{a_{11}}y_1^2 + \psi(x_2, \dots, x_n).$$

Dowód c.d.

Po podstawieniu y_1, \dots, y_n mamy:

$$f(x) = \frac{1}{a_{11}}y_1^2 + \psi(y_2, \dots, y_n)$$

Z założenia indukcyjnego, istnieje liniowo niezdegenerowanych $(n - 1)$ zmiennych.

Zdefiniujmy: $z_k = \sum_{l=2}^n R_{kl}y_l$, gdzie $k = 2, \dots, n$,

które sprowadzają formę ψ do postaci kanonicznej:

$$\psi(y_2, \dots, y_n) = b_{22}z_2^2 + b_{33}z_3^2 + \dots + b_{nn}z_n^2$$

$$z_1 = y_1$$

$$z_k = \sum_{l=2}^n R_{kl}y_l = R_{k2}y_2 + \dots + R_{kn}y_n$$

Dowód c.d.

$$(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow (y_1, \dots, y_n) \longrightarrow (z_1, \dots, z_n)$$

$$f(x) = \frac{1}{a_{11}}z_1^2 + b_{22}z_2^2 + \dots + b_{nn}z_n^2$$

2) $\forall_{1 \leq i \leq n} a_{ii} = 0$

np. $a_{12} \neq 0 \Rightarrow f(x) = 2a_{12}x_1x_2$

$$x_1 = \widehat{x}_1 + \widehat{x}_2$$

$$x_2 = \widehat{x}_1 - \widehat{x}_2$$

$$x_3 = \widehat{x}_3$$

\vdots

$$x_n = \widehat{x}_n$$

Stąd:

$$f(x) = 2a_{12}(\widehat{x}_1 + \widehat{x}_2)(\widehat{x}_1 - \widehat{x}_2) + \dots = 2a_{12}\widehat{x}_1^2 - 2a_{12}\widehat{x}_2^2 + \dots$$

Postępując analogicznie jak w punkcie pierwszym, otrzymujemy żadaną tezę.

Definicja 27.1

Forma kwadratowa nad \mathbb{C} ma postać normalną, jeśli:

$$f(x) = x_1^2 + \dots + x_r^2,$$

gdzie $r \leq n$. Ogólnie $f(x) = a_{11}x_1^2 + \dots + a_{rr}x_r^2$,

gdzie $r \leq n$ i $\forall_i a_{ii} = \pm 1$.

Wniosek

W przestrzeni zespolonej każdą formą kwadratową można przekształcić do postaci normalnej za pomocą niezdegenerowanego przekształcenia liniowego.

$$\forall_i a_{ii} = 1$$

W przypadku rzeczywistym niektóre a_{ii} mogą być mniejsze od 0.

$$y_i = \sqrt{|a_{ii}|}x_i, \text{ gdzie } i \leq r$$

$$y_i = x_i, \text{ gdzie } i > r$$

Wniosek c.d.

Jeśli pierwsze k współczynników jest dodatnich, a pozostałe są ujemne, to $f(x)$ ma postać:

$$f(x) = y_1^2 + \dots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \dots - y_r^2.$$

Definicja 27.2

Niech dana będzie forma kwadratowa nad \mathbb{R} postaci:

$$f(y) = y_1^2 + \dots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \dots - y_r^2.$$

Liczbę wyrazów dodatnich i ujemnych w formie kwadratowej nazywamy odpowiednio dodatnim i ujemnym indeksem formy, zaś różnicę między indeksem dodatnim i ujemnym nazywamy sygnaturą.

Twierdzenie 27.3 (Prawo bezwładności form kwadratowych)

Indeks dodatni i ujemny są niezmiennikami formy kwadratowej, tzn. nie zależą od wyboru bazy, w której forma ma postać normalną.

Dowód

Niech dana będzie baza e'_1, e'_2, \dots, e'_n w której forma f ma postać normalną:

$$f(x) = z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_m^2 - z_{m+1}^2 - \dots - z_r^2, \quad (5)$$

gdzie z_i są współczynnikami x w bazie e'_1, e'_2, \dots, e'_n .

W bazie e_1, \dots, e_n forma f ma postać normalną:

$$f(x) = y_1^2 + \dots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \dots - y_r^2. \quad (6)$$

Mamy udowodnić, że $k = m$.

Załóżmy, że $k \neq m$, np. $k > m$.

Rozważmy w V podprzestrzenie

$$L = \text{gen}\{e_1, e_2, \dots, e_k\}, \quad L' = \text{gen}\{e'_{m+1}, e'_{m+2}, \dots, e'_n\}.$$

Dowód c.d.

Ponieważ $\dim(L + L') \leq \dim V = n$, więc z Lematu 25.4 wynika że

$$\dim(L \cap L') = \dim L + \dim L' - \dim(L + L') \geq k + (n - m) - n = k - m > 0.$$

Istnieje więc niezerowy wektor $a \in L \cap L'$:

$$0 \neq a = a_1 e_1 + \dots + a_k e_k = a'_{m+1} e'_{m+1} \dots + a'_n e'_n.$$

Z wzoru (6) mamy $f(a) = a_1^2 + \dots + a_k^2 > 0$. Ale z (5) wynika, że $f(a) = -(a'_{m+1})^2 - \dots - (a'_r)^2 \leq 0$ (może się zdażyć, że $r < n$ i $a'_{m+1} = \dots = a'_r = 0$). Co dowodzi, że $k = m$.

Srowadzenie formy kwadratowej do postaci kanonicznej metodą Jacobiego

Niech f - forma kwadratowa nad \mathbb{R}^n

$$f(x) = a(x, x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$$

$a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ - forma dwuliniowa symetryczna

$$A = [a_{ij} = a(e_i, e_j)]_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Rozpatrzmy minory główne macierzy A :

$$\Delta_0 = 1, \Delta_1 = a_{11}$$

$$\Delta_2 = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Srowadzenie formy kwadratowej do postaci kanonicznej metodą Jacobiego c.d.

$$\Delta_3 = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

⋮

$$\Delta_n = \det A$$

Metodę Jacobiego można stosować przy założeniu, że $\forall i \Delta_i \neq 0$.

Szukamy specjalnej bazy e'_1, \dots, e'_n , w której forma f ma postać kanoniczną:

$$(\star) \left\{ \begin{array}{l} e'_1 = P_{11}e_1 \\ e'_2 = P_{21}e_1 + P_{22}e_2 \\ \vdots \\ e'_n = P_{n1}e_1 + P_{n2}e_2 + \dots + P_{nn}e_n \end{array} \right\}, \text{ here } P_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Sprowadzanie formy kwadratowej do postaci kanonicznej metodą Jacobiego c.d.

Żeby w bazie e'_1, \dots, e'_n forma f miała postać kanoniczną musi być spełniony warunek:

$$(*) \forall_{1 < j < n} a(e'_j, e'_j) = a'_{jj} = 0,$$

dla $i = 1, 2, \dots, j - 1$ (To założenie jest wystarczające, gdyż założyliśmy, że a symetryczna).

Aby zachodził warunek $(*)$ wystarczy żądać, aby:

$$a(e_i, e'_j) = 0 \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, j - 1 \text{ oraz } j = 1, 2, \dots, n$$

$$\begin{aligned} a(e'_i, e'_j) &= a(P_{i1}e_1 + P_{i2}e_2 + \dots + P_{ii}e_i, e'_j) = \\ &= P_{i1}a(e_1, e'_j) + P_{i2}a(e_2, e'_j) + \dots + P_{ii}a(e_i, e'_j) = 0 \end{aligned}$$

Założmy dodatkowo, że $a(e_j, e'_j) = 1$.

Dla $j = 1$ powyższe założenia wyglądają następująco:

$$a(e_1, e'_1) = 1 = a(e_1, P_{11}e_1) = P_{11}a_{11}, \text{ czyli } P_{11} = \frac{1}{a_{11}} = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}.$$

Sprowadzanie formy kwadratowej do postaci kanonicznej metodą Jacobiego c.d.

Z indukcji, założmy, że mamy określone współczynniki w pierwszych $(j - 1)$ wierszach wzoru (★).

Dla znalezienia współczynników występujących w wierszu o numerze j , zapiszmy potrzebne warunki:

$$a(e_1, e'_j) = \dots = a(e_{j-1}, e'_j) = 0$$

$$a(e_j, e'_j) = 1$$

Korzystając z (★) dostajemy następujący układ równań:

$$(o) \begin{cases} a_{11}P_{j1} + a_{12}P_{j2} + \dots + a_{1j}P_{jj} = 0 \\ \vdots \\ a_{j-1,1}P_{j1} + a_{j-1,2}P_{j2} + \dots + a_{j-1,j}P_{jj} = 0 \\ a_{j1}P_{j1} + a_{j2}P_{j2} + \dots + a_{jj}P_{jj} = 1 \end{cases}$$

Ponieważ:

$$\begin{aligned} 0 &= a(e_1, e'_j) = a(e_1, P_{j1}e_1 + P_{j2}e_2 + \dots + P_{jj}e_j) = \\ &= a_{11}P_{j1} + a_{12}P_{j2} + \dots + a_{1j}P_{jj} \end{aligned}$$

Sprowadzanie formy kwadratowej do postaci kanonicznej metodą Jacobiego c.d.

Wyznacznik tego układu równań jest różny od 0 (tj. $\det \Delta_j \neq 0$).

Stąd można znaleźć P_{ij} , z zapisu (o).

Pozostało jeszcze sprawdzić, jak wygląda forma f po zmianie bazy z e_1, \dots, e_n na e'_1, \dots, e'_n .

Ze wzorów Cramera mamy:

$$P_{jj} = \frac{1}{\Delta_j} \det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & 0 \\ a_{21} & \dots & a_{2j-1} & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{j-11} & \dots & a_{j-1j-1} & 0 \\ a_{j1} & \dots & a_{jj-1} & 1 \end{bmatrix} = \frac{\Delta_{j-1}}{\Delta_j}$$

$$\text{Niech } B = \begin{bmatrix} P_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\det B = P_{11} P_{22} \dots P_{nn} = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \dots \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} = \frac{\Delta_0}{\Delta_n} = \frac{1}{\Delta_n}$$

Sprowadzanie formy kwadratowej do postaci kanonicznej metodą Jacobiego c.d.

W końcu napiszmy jak wygląda nasza forma w bazie e'_1, \dots, e'_n :

$$a'_{jj} = a(e'_j, e'_j) = a(P_{j1}e_1 + \dots + P_{jj}e_j, e'_j) = P_{jj}a(e_j, e'_j) = P_{jj} = \frac{\Delta_{j-1}}{\Delta_j}$$

Stąd:

$$f(x) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}(x'_1)^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}(x'_2)^2 + \dots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}(x'_n)^2$$

Udowodnijmy powyższy wzór. Sprowadźmy formę do postaci kanonicznej.

W nowej bazie e'_1, \dots, e'_n forma f ma postać:

$$f(x) = a'_{11}(x'_1)^2 + a'_{22}(x'_2)^2 + \dots + a'_{nn}(x'_n)^2 \text{ oraz } \forall_i a'_{ii} \neq 0.$$

$$\Delta' = \det \begin{bmatrix} a'_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & a'_{nn} \end{bmatrix} = a'_{11} \dots a'_{nn}$$

$$\begin{aligned} \Delta' &= \det P^T A P = \det P^T \det A \det P = \\ &= \det P \det A \det P = \det A \det^2 P = \Delta (\det P)^2, \end{aligned}$$

gdzie P - macierz zmiany bazy.

Srowadzenie formy kwadratowej do postaci kanonicznej metodą Jacobiego c.d.

Czyli: $\Delta' = \Delta(\det P)^2$.

Ponieważ $\Delta' > 0$, więc $\Delta > 0$.

Definicja 28.1

Formę f nazywamy dodatnio określoną, jeśli $f(x) > 0$ dla wszystkich $x \neq 0$.

Definicja 28.2

Formę f nazywamy ujemnie określoną, jeśli $f(x) < 0$ dla wszystkich $x \neq 0$.

Uwaga

Zauważmy, że jeśli f jest dodatnio określona, to $\forall_{i=1, \dots, n} a_{ii} > 0$.

$a_{ii} = a(e_i, e_i) = f(e_i) > 0$

Przykład

$f(x) = -x_1^2 - x_2^2$ (forma nie jest dodatnio określona)

$$\Delta = \det A = \det \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = 1$$

Uwaga

W przestrzeni n -wymiarowej każda forma dodatnio określona ma rząd n .
($\Delta \neq 0$)

Przykład

$f(x) = x_1^2 + 1000x_1x_2 + x_2^2$

$a_{11} > 0, a_{22} > 0$

$f(-1, 1) = 1 - 1000 + 1 < 0$

Uwaga

Jeśli f jest dodatnio określona, to wyznacznik jej macierzy jest dodatni.
($\Delta = \det A > 0$)

Twierdzenie 28.3 (Kryterium Sylwestera)

Na to, by forma kwadratowa była dodatnio określona potrzeba i wystarcza, aby wszystkie minory główne jej macierzy były dodatnie.

Dowód

" \Rightarrow " Zakładamy, że $\forall_{x \neq 0} f(x) > 0$. Rozważmy: $V_k = \text{gen}\{e_1, \dots, e_k\}$.

$$f|_{V_k}(x) = f(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) > 0$$

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^k a_{ij}x_i x_j$$

Forma f jest dodatnio określona na V_k , gdyż jest dodatnio określona na V . Stąd i z faktu, że $\det A > 0$ mamy:

$$\forall_{1 \leq i \leq n} \Delta_i > 0.$$

" \Leftarrow " Niech $\Delta_k > 0$ dla $k = 1, \dots, n$. Z metody Jacobiego istnieje baza, w której:

$$f(x) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}(x'_1)^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}(x'_2)^2 + \dots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}(x'_n)^2$$

Dowód c.d.

Jeśli $x \neq 0$, to co najmniej jedna współrzędna jest różna od zera, więc $x_k \neq 0$.

Stąd: $f(x) > 0$.

Przykład

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = \frac{1}{a}[(ax + by)^2 + (ac - b^2)y^2]$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = a$$

$$\Delta_2 = ac - b^2$$

Macierz jest dodatnio określona, gdy:

$\Delta_1 > 0 \wedge \Delta_2 > 0$, czyli gdy:

$$a > 0 \wedge ac - b^2 > 0.$$

Zadania

Metodą Lagrange'a sprowadzić formę kwadratową q do postaci kanonicznej.

- $q = x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2$

Macierz q jest następująca:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \text{ Wypisujemy czynniki z } x_1 \text{ i dopełniamy do}$$

kwadratu:

$$x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 = (x_1 + 2x_2 - x_3)^2 - 4x_2^2 + 4x_2x_3 - x_3^2$$

Stąd podstawiając powyższe wyrażenie do formy i postępując podobnie z czynnikami zawierającymi pozostałe zmienne otrzymujemy:

$$\begin{aligned}q &= [(x_1 + 2x_2 - x_3)^2 - 4x_2^2 + 4x_2x_3 - x_3^2] + 3x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2 = \\&= (x_1 + 2x_2 - x_3)^2 - x_2^2 + 6x_2x_3 + x_3^2 = \\&= (x_1 + 2x_2 - x_3)^2 - x_2^2 + 6x_2x_3 - 9x_3^2 + 9x_3^2 + x_3^2 = \\&= (x_1 + 2x_2 - x_3)^2 - (x_2 - 3x_3)^2 + 10x_3^2.\end{aligned}$$

Zadania c.d.

Podstawiamy:

$$y_1 = x_1 + 2x_2 - x_3$$

$$y_2 = x_2 - 3x_3$$

$$y_3 = x_3$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$q = y_1^2 - y_2^2 + 10y_3^2.$$

Macierzowo to wygląda następująco

$$M^T A M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Jeśli zaczniemy od x_2 , to:

$$q = \frac{1}{3}(2x_1 + 3x_2 + x_3)^2 - \frac{1}{3}(x_1 + 5x_3)^2 + 10x_3^2$$

Jest to też poprawne sprowadzenie formy q do formy kanonicznej:

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{3}(2x_1 + 3x_2 + x_3)^2 - \frac{1}{3}(x_1 + 5x_3)^2 + 10x_3^2 = \\ &= \frac{1}{3}(4x_1^2 + 9x_2^2 + x_3^2 + 12x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3) - \frac{1}{3}(x_1^2 + 10x_1x_3 + 25x_3^2) + 10x_3^2 = \\ &= \frac{1}{3}(3x_1^2 + 9x_2^2 - 24x_3^2 + 12x_1x_2 - 6x_1x_3 + 6x_2x_3) + 10x_3^2 = \\ &= x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 \end{aligned}$$

Zadania c.d.

- $q = 2x_1x_2 + 4x_2x_3$

Podstawmy:

$$x_1 = y_1 - y_2$$

$$x_2 = y_1 + y_2$$

$$x_3 = y_3$$

$$\begin{aligned} q &= 2(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) + 4(y_1 + y_2)y_3 = 2y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_1y_3 + 4y_2y_3 = \\ &= 2[(y_1 + y_3)^2 - y_3^2] - 2[(y_2 - y_3)^2 - y_3^2] = 2[(y_1 + y_3)^2 - (y_2 - y_3)^2] \end{aligned}$$

$$z_1 = \sqrt{2}(y_1 + y_3) = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 + x_2 + 2x_3)$$

$$z_2 = \sqrt{2}(y_2 - y_3) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x_1 + x_2 - 2x_3)$$

$$z_3 = y_3 = x_3$$

Inne podstawienie: (Sprawdzić ! Wylicz macierz M^{-1} .)

$$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(z_1 - z_2) - 2\sqrt{2}z_3$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(z_1 + z_2)$$

$$x_3 = z_3$$

Definicja 29.1

Hiperpowierzchnią stopnia drugiego nazywamy zbiór:

$$(*) \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^n b_i x_i + c = 0 \right\}$$

Uwaga

- formę kwadratową $x \mapsto a(x, x)$ o macierzy $[a_{ij}]$ nazywamy grupą wyrazów stopnia drugiego
- formę liniową $x \mapsto 2b(x) = 2 \sum_{i=1}^n b_i x_i$ nazywamy grupą wyrazów stopnia pierwszego
- stałą $c \in \mathbb{R}$ nazywamy wyrazem wolnym

Komentarze

- $x^2 + y^2 + z^2 = -1$ jest to hiperpowierzchnia stopnia 2
- sfera urojona: $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0\}$

Uwaga

Równanie (*) jest to równanie ogólne o $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ zmiennych. Istotnie $\frac{1}{2}n(n+1) + n + 1 = (n+1)(\frac{1}{2}n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$.

Twierdzenie 29.2

Poprzez zamianę zmiennych można równanie hiperpowierzchni zapisać w formie:

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}x_i x_j = c,$$

gdzie $[a_{ij}]$ jest macierzą formy.

Definicja 29.3

Środkiem hiperpowierzchni drugiego stopnia nazywamy punkt, względem którego wszystkie punkty hiperpłaszczyzny są położone parami symetrycznie.

Uwaga

Symetryczność oznacza:

$$(x_1, \dots, x_n) \in A \Rightarrow (-x_1, \dots, -x_n) \in A$$

Definicja 29.4 (bis)

Środkiem dowolnej hiperpowierzchni stopnia drugiego nazywamy taki punkt, że jeśli umieścimy w nim początek układu współrzędnych, to równanie hiperpowierzchni przyjmie postać:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j + c = 0.$$

Klasyfikacja częściowa powierzchni hiperbolicznych stopnia 2 - kwadryk

Powierzchnia hiperboliczna stopnia 2 (kwadryka) to zbiór punktów:

$$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + b_1xy + b_2xz + b_3yz + c_1x + c_2y + c_3z + d = 0,$$

gdzie $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d \in \mathbb{K}$ i przynajmniej jedna z nich $\neq 0$. Jest to równanie ogólne hiperpowierzchni stopnia 2.

Hiperpowierzchnię stopnia 2 można zapisać też w postaci kanonicznej:

$$\bar{a}_1x^2 + \bar{a}_2y^2 + \bar{a}_3z^2 + \bar{d} = 0.$$

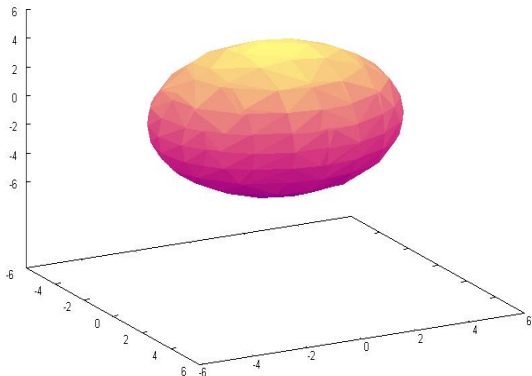
Wyróżniamy kwadryki właściwe (niezdegenerowane) i niewłaściwe (zdegenerowane).

Klasyfikacja częściowa powierzchni hiperbolicznych stopnia 2 - kwadryk c.d.

1 Kwadryki właściwe

- Elipsoida:

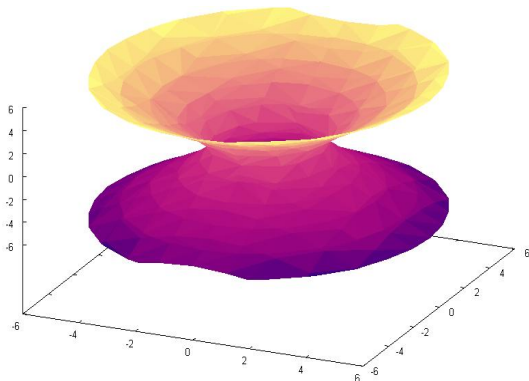
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Klasyfikacja częściowa powierzchni hiperbolicznych stopnia 2 - kwadryk c.d.

- Hiperboloida jednopowłokowa:

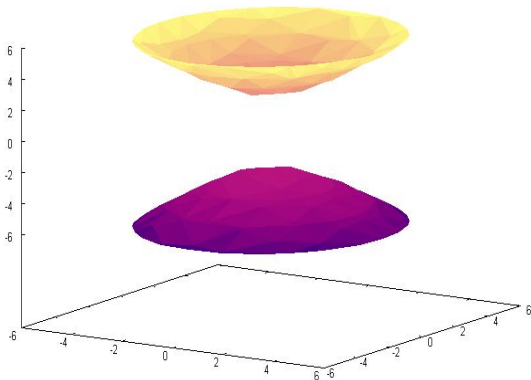
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Klasyfikacja częściowa powierzchni hiperbolicznych stopnia 2 - kwadryk c.d.

- Hiperboloida dwupowłokowa:

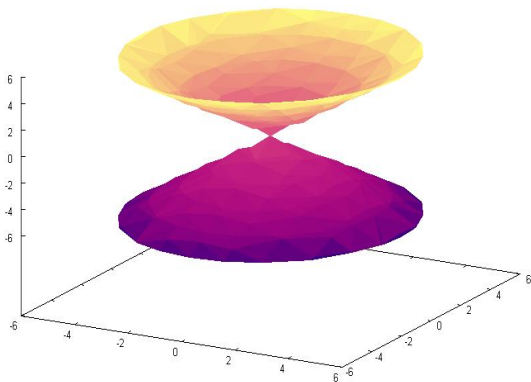
$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Klasyfikacja częściowa powierzchni hiperbolicznych stopnia 2 - kwadryk c.d.

- Stożek eliptyczny:

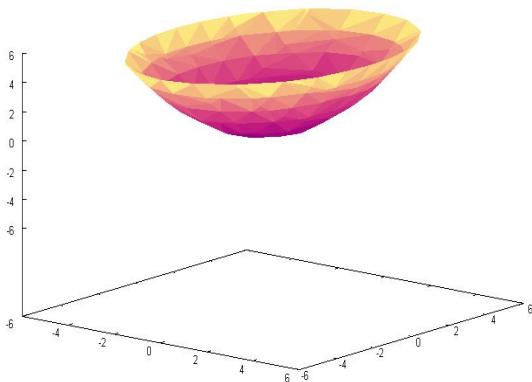
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$



Klasyfikacja częściowa powierzchni hiperbolicznych stopnia 2 - kwadryk c.d.

- Paraboloida eliptyczna:

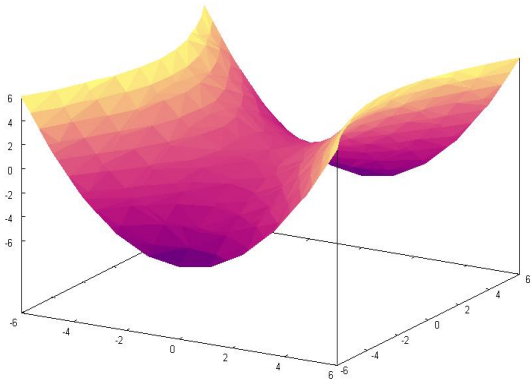
$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$



Klasyfikacja częściowa powierzchni hiperbolicznych stopnia 2 - kwadryk c.d.

- Paraboloida hiperboliczna:

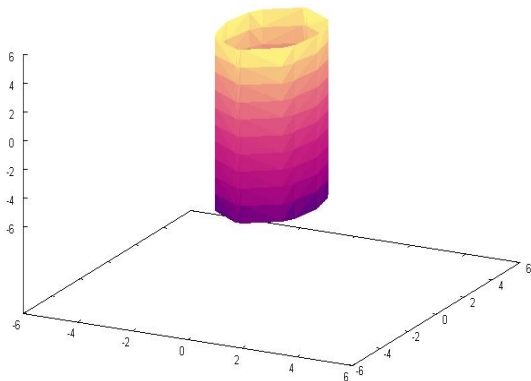
$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$



Klasyfikacja częściowa powierzchni hiperbolicznych stopnia 2 - kwadryk c.d.

- Walec eliptyczny:

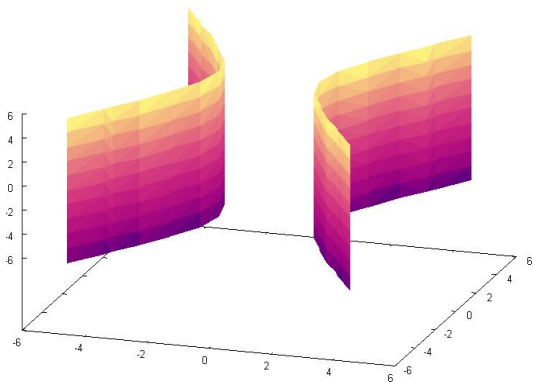
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Klasyfikacja częściowa powierzchni hiperbolicznych stopnia 2 - kwadryk c.d.

- Walec hiperboliczny:

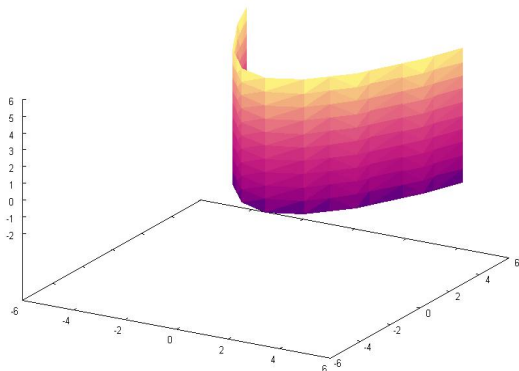
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Klasyfikacja częściowa powierzchni hiperbolicznych stopnia 2 - kwadryk c.d.

- Walec paraboliczny:

$$x^2 = 2py$$



Klasyfikacja częściowa powierzchni hiperbolicznych stopnia 2 - kwadryk c.d.

2. Kwadryki niewłaściwe

- Elipsoida urojona:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$$

- Stożek urojony:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

- Urojony walec eliptyczny:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$

- Równoległe płaszczyzny urojone:

$$x^2 = -a^2$$