Podstawowe funkcje arytmetyczne

Adrian Frankowski

Definicje

Definicja: Funkcją arytmetyczną nazywamy dowolne odwzorowanie $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, gdzie $\mathbb{N}$ jest zbiorem liczb naturalnych, $\mathbb{C}$ zbiorem liczb zespolonych.

Definicja: Funkcję arytmetyczną f nazywamy multiplikatywną (addytywną), jeśli:

1. f nie jest równa tożsamościowo zeru,
2. $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$, o ile $(m, n) = 1$ (dla funkcji addytywnej $f(m \cdot n) = f(m) + f(n)$, o ile $(m, n) = 1$).

1. Funkcja σ (funkcja Sigma)

$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$, gdzie sumowanie przebiega po wszystkich dzielnikach dodatnich liczby n; dla $k = 0$ funkcją σ_0, czyli ilość dzielników jest też oznaczana d, dla $k = 1$ funkcję σ_1, sumę dzielników, oznacza się przez σ. W programie Mathematica $\sigma_k(n)$ ma oznaczenie DivisorSigma[k,n].

Przykłady:

Dzielniki liczby 20: 1,2,4,5,10,20
Kwadraty dzielników: 1,4,16,25,100,400

DivisorSigma[1,20] = 42
DivisorSigma[2,20] = 546

Z funkcją σ związany jest bardzo znany problem **liczb doskonałych**:

Definicja: Mówimy, że liczba naturalna N jest doskonała, jeśli $\sigma(N) = 2N$, czyli liczba N jest równa sumie wszystkich swoich dodatnich dzielników różnych od N.

Fakt: Jeśli $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\propto_i}$ jest rozkładem kanonicznym liczby naturalnej $n > 1$, to

1. $\sigma_k(n) = \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{(\propto_i+1)k}-1}{p_i^k-1}$, dla $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. W szczególności:

   $\sigma_1(n) = \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}$.

2. $\varphi(n) = \prod_{i=1}^{k}(p_i - 1)\, p_i^{\alpha_i-1} = n \prod_{i=1}^{k}(1 - \frac{1}{p_i})$.

Sprawdzimy, że liczba 8128 jest doskonała

Mamy: $8128 = 64 \cdot 127 = \ 2^6 \cdot 127.$

A zatem:

$$\sigma(8128) = \frac{2^7-1}{1} \cdot \frac{127^2-1}{127-1} = 127 \cdot 128 = 16256 = 2 \cdot 8128$$

Zatem rzeczywiście liczba ta jest doskonała.

```
Doskonała[n_]:=If[DivisorSigma[1,n]==2*n,Return[True],
Return[False]]
Doskonała[8128]
True
```

Przykładami liczb doskonałych są 6, 28, 496, 8128. Wszystkie znane liczby doskonałe są parzyste. Nie udało się dotąd znaleźć żadnej liczby doskonałej nieparzystej, ani dowodu, że liczby takie nie istnieją.

Twierdzenie: Dla każdego $k \in \mathbb{R}$ funkcja σ_k jest multiplikatywna.

Dowód: Jeśli $(m,n) = 1$, to każdy dzielnik d liczby mn jest postaci $d = d_1 \cdot d_2$, gdzie $d_1 | m$ oraz $d_2 | n$. Zatem:

$$\left(\sum_{\mathrm{d_1|m}} d_1^k\right) \cdot \left(\sum_{\mathrm{d_2|n}} d_2^k\right) = \sum_{\mathrm{d_1|m,d_2|n}} (\mathrm{d_1 \cdot d_2})^k = \sum_{\mathrm{d|mn}} d^k, \text{ czyli}$$

$\sigma_k(m) \cdot \sigma_k(n) = \sigma_k(mn)$. □

Sprawdźmy to na przykładzie:

```
Table[DivisorSigma[3,n*(n+1)]==DivisorSigma[3,n]*DivisorSigma[3,n+1],{n,1,20}]
```

{True,True,True,True,True,True,True,True,True,True,True,True,True,True,True,True,True,True,True,True}

2. Funkcja $\boldsymbol{\varphi}$ (funkcja Eulera)

$\varphi(n) = \sum_{k \leq n, (k,n)=1} 1$, funkcja Eulera, czyli moc zredukowanego układu reszt modulo n; Mathematica: EulerPhi[n].

Twierdzenie: Funkcja φ jest multiplikatywna.

Sprawdzenie na przykładzie:

```
Table[EulerPhi[n*(n+1)]==EulerPhi[n]*EulerPhi[n+1],{n,1,20}]
{True,True,True,True,True,True,True,True,True,True,True,True,True,True,True,True,True,True,True,True}
```

3. Funkcja $\boldsymbol{\mu(n)}$ (funkcja Moebiusa)

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 \; dla \; n = 1 \\ (-1)^k \; dla \; n = \; p_1, \dots, p_k, gdzie \; p_1, \dots, p_k \; - różne \; liczby \; pierwsze \\ 0 \; istnieje \; liczba \; pierwsza \; p, taka \; że \; p^2 | n \end{cases}$$

Definicja funkcji Moebiusa wydaje się dość zagmatwana, ale to bez wątpienia jedna z ważniejszych funkcji arytmetycznych; Mathematica: MoebiusMu[n].

Twierdzenie: Funkcja μ jest addytywna.

Sprawdzenie na przykładzie:

```
Table[MoebiusMu[n*(n+1)]==MoebiusMu[n]*MoebiusMu[n+1],{n,1,20}]
{True,True,True,True,True,True,True,True,True,True,True,True,True,True,True,True
,True,True,True,True}
```

4. Funkcja $\boldsymbol{\omega}$ (funkcja Omega)

$\omega(n) = \sum_{p|n} 1$, czyli ilość różnych liczb pierwszych dzielących n;
Mathematica: PrimeOmega[n].

Twierdzenie: Funkcja ω jest addytywna.

Dowód: dla $(n, m) = 1$,

$$\omega(nm) = \sum_{p|nm} 1 = \sum_{p|n} 1 + \sum_{p|m} 1 = \omega(n) + \omega(m). \square$$

Sprawdzenie:

```
Table[PrimeOmega[n*(n+1)]==PrimeOmega[n]+PrimeOmega[n+1],{n,1,20}]
{True,True,True,True,True,True,True,True,True,True,True,True,True,True,True,True,Tru
e,True,True,True}
```

5. Funkcja $\boldsymbol{\beta}$ (funkcja Beta)

$\beta(n) = \sum_{p|n} p$, czyli suma różnych liczb pierwszych dzielących n; w programie Mathematica nie ma „wbudowanej” funkcji $\beta(n)$, można ją zdefiniować tak:
beta[n_]:=(lista=FactorInteger[n];If[n==1,0,Sum[lista[[i]][[1]],{i,1,Length[lista]}]])

Twierdzenie: Funkcja β jest addytywna.

Sprawdzenie na przykładzie:

Table[beta[n*(n+1)]==beta[n]+beta[n+1],{n,1,20}]
{True,True,True,True,True,True,True,True,True,True,True,True,True,True,True,True
,True,True,True,True}

Zadanie 7.1.1 ([ETL], ćwiczenie 2c, e/strona 86) Znajdź n, jeśli $\varphi(n) = 14$.

```
zadanie711c[n_]:=(l={};For[i=1,i<=n,i++;If[EulerPhi[i]==14,AppendTo[l,i]]];Return[l]);
zadanie711c[10000] {}
```

Komunikat {} sygnalizuje prawdopodobny brak rozwiązań. Ponieważ $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\propto_i}$ jest rozkładem kanonicznym liczby naturalnej, zatem

$14 = p_1^{\propto_1 - 1}(p_1 - 1)p_2^{\propto_2 - 1}(p_2 - 1)\ldots$, więc

p_1 = 2, α_1 = 1, 2 oraz p_2 = 7, α_2 = 2 ale wtedy

$p_1^{\propto_1 - 1}(p_1 - 1)p_2^{\propto_2 - 1}(p_2 - 1) \geq 42.$

Znajdź n, jeśli $\varphi(n) = \frac{n}{2}$.

```
zadanie711e[n_]:=(l={};For[i=1,i<=n,i++;If[EulerPhi[i]==i/2,AppendTo[l,i]]]; Return[l]);
zadanie711e[10000] {2,4,8,16,32,64,128,256,512,1024,2048,4096,8192}
```

Prawidłowość jest ewidentna, rozwiązaniami są liczby postaci 2^m, gdzie $m \in \mathbb{N}$. Ponieważ

$$\varphi(n) = n\prod_{i=1}^{k}(1 - \frac{1}{p_i}), \text{ więc}$$

$$\frac{n}{2} = n\prod_{i=1}^{k}(1 - \frac{1}{p_i}) \Rightarrow \frac{1}{2} = \prod_{i=1}^{k}(1 - \frac{1}{p_i})$$

Ale to oznacza, że $n = 2^m$.

Zadanie 7.1.2 ([ETL] ćwiczenie 6g/strona 87) Udowodnij następującą własność funkcji Eulera: $\varphi(n) \leq n - \sqrt{n}$ dla liczb złożonych n.

Mathematica:

```
zadanie712g[n_]:=If[EulerPhi[n]<=n-Sqrt[n], Return[True],Return[False]]
sprawdzenie[n_]:=Table[zadanie712g[m],{m,Select[Range[n],(PrimeQ[#]==False&&#>1) &]}]
sprawdzenie[25] {True,True,True,True,True,True,True,True,True,True,True,True,True,True,True,
True,True,True,True}
```

Jeśli n jest liczbą złożoną, to $n = ab$, gdzie $a, b > 1$; możemy założyć, że $a \geq b$, wówczas $b \leq \sqrt{n}$. Wszystkie liczby postaci ax, gdzie $x \leq \sqrt{n}$ nie są względnie pierwsze z n, ale to znaczy, że ilość liczb względnie pierwszych z n, mniejszych bądź równych n jest co najwyżej

$$(n-1) - [\sqrt{n}] \leq n - \sqrt{n}.$$

Zadanie 7.1.5 ([ETL], ćwiczenie 8a/strona 87) Udowodnij następującą własność funkcji σ (suma dzielników):

$$\sum_{d|n} \frac{1}{d} = \frac{\sigma(n)}{n}.$$

Mathematica:

```
zadanie715a[n_]:=Table[{Sum[1/d,{d,Divisors[k]}],(DivisorSigma[1,k])/k},{k,1, n}]
zadanie715a[15]
{{1,1},{3/2,3/2},{4/3,4/3},{7/4,7/4},{6/5,6/5},{2,2},{8/7,8/7},{15/8,15/8},
{13/9,13/9},{9/5,9/5},{12/11,12/11},{7/3,7/3},{14/13,14/13},{12/7,12/7},{8/5, 8/5}}
```

Jeśli d przebiega zbiór dzielników n, to n/d też przebiega zbiór dzielników n. Stąd mamy:

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} \frac{n}{d} = n \sum_{d|n} \frac{1}{d}, \text{ zatem } \sum_{d|n} \frac{1}{d} = \frac{\sigma(n)}{n}.$$