Dzielnikowy NIM

Rozpatrzmy następującą **grę**:

Dane są dwa stosy kamieni, w jednym znajduje się *m* kamieni, w drugim *n* kamieni. Dwaj gracze (rozpoczynający A i grający jako drugi B) na zmianę wykonują ruchy, przy czym ruch polega na tym, że można wziąć z jednego z dwóch stosów liczbę kamieni, która jest dzielnikiem liczby kamieni w tym stosie. Wygrywa ten gracz, który weźmie ostatni (ostatnie) kamień.

<u>Przykład</u>

Popatrzmy na rozgrywkę z czterema i trzema kamieniami w stosach

W rozgrywce tej powinien wygrać gracz A, wystarczy, że weźmie jeden szary kamień.

Teraz taktyka gracza A jest następująca: „naśladuje" ruchy gracza B.

Jaka jest teoria tej gry?

Po sprawdzeniu wielu konkretnych przypadków, okazało się, że:

1) W grze $(2d+1,k)$ gracz A wygrywa wtedy i tylko wtedy, gdy $2 \mid k$.

<u>Dowód</u>

Indukcja ze względu na $m = 2d+1+k$.

Dla $m=1$ mamy przypadek $(1,0)$ ($d=0, k=0$); oczywiście gracz A wygrywa i oczywiście spełniony jest warunek $2 \mid 0$.

Załóżmy prawdziwość dla *m*, sprawdzamy dla $m+1 = 2d+1+k$.

$\Leftarrow$

Zakładamy, że $2 \mid k$. Wystarczy, że podamy pierwszy wygrywający ruch A:

$$(2n+1,k) \mapsto (2n+1,k-1)$$

Ten ruch rzeczywiście daje zwycięstwo A, gdyż teraz wystarczy skorzystać z założenia indukcyjnego ($2d+1+k-1=m$), z którego wynika, że w tej pozycji wygrywa gracz drugi, bo $2\nmid k-1$.

$\Rightarrow$

Załóżmy, że $2\nmid k$. Pokażemy, że wygra gracz B. Gracz A ma dwie możliwości:

$$(2d+1,k)\mapsto(2d+1,k-p)$$
$$(2d+1,k)\mapsto((2d+1)-p,k)$$

W pierwszym przypadku z nieparzystości k wynika nieparzystość p, więc liczba $k-p$ jest parzysta i zgodnie z założeniem indukcyjnym pozycja $(2d+1,k-m)$ jest wygrywająca dla rozpoczynającego, czyli dla B. Podobne rozumowanie stosujemy dla drugiego przypadku.

2) Niech (m,n) będzie pozycją początkową w grze. Załóżmy, że $m=2^{s_1}m_1$, $n=2^{s_2}n_1$, gdzie m_1,n_1 są liczbami nieparzystymi. Wówczas gracz A wygrywa wtedy i tylko wtedy, gdy $s_1\neq s_2$.

<u>Dowód</u>

Indukcja ze względu na s_1+s_2.

Dla $s_1+s_2=0$ mamy $s_1=s_2=0$. Prawa strona równoważności jest fałszywa i lewa też, bo dla pozycji początkowej (m_1,n_1) wygrywa gracz B.

Znowu załóżmy prawdziwość dla $s_1+s_2=k$ i sprawdźmy dla $s_1+s_2=k+1$.

$\Leftarrow$

Niech $s_1\neq s_2$, np. $s_1>s_2$, $s_1=s_2+t$. Popatrzmy jaki ruch wykonuje A:

$$(2^{s_1}m_1,2^{s_2}n_1)\mapsto(2^{s_1}m_1-2^{s_2}m_1,2^{s_2}n_1)=(2^{s_2}m_1(2^t-1),2^{s_2}n_1)$$

Wystarczy teraz skorzystać z założenia indukcyjnego: ostatnia pozycja jest sprzyjająca dla gracza drugiego.

$\Rightarrow$

Załóżmy, że $s_1=s_2$. Pokażemy, że każdy ruch A jest przegrywający.

$$(2^{s_1}m_1,2^{s_1}n_1)\mapsto(2^{s_1}m_1-2^t m_1',2^{s_2}n_1)=(2^t m_1'(2^{s_1-t}\frac{m_1}{m_1'}-1),2^{s_1}n_1),$$

gdzie $t>0$, m_1' jest dzielnikiem m_1. Widzimy, że $t+s_1\le k$ oraz $t\neq s_1$, więc otrzymana pozycja jest sprzyjająca dla gracza drugiego.

Króciutko o strategii

Strategia została pokazana w dowodzie „$\Leftarrow$”.

Popatrzmy, jak wyglądają pierwsze ruchy w pozycjach „szczęśliwych” dla A:

$(8,12) \mapsto (8-4,12) = (4,12)$

$(18,12) \mapsto (18,12-6) = (18,6)$

$(118,112) \mapsto (118,112-2\cdot 7) = (118,98)$