1 Równanie Verhulsta

$$\frac{dN(t)}{dt} = \alpha N(t) \left(K - N(t)\right),$$

gdzie:
$N(t)$ - liczebność populacji w chwili t,
α - współczynnik wzrostu populacji N (reprodukcji), $\alpha > 0$,
K - pojemność ekosystemu.

Równanie bistabilne:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \alpha N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K_-}\right) \left(\frac{N(t)}{K_+} - 1\right), \quad 0 < K_- < K_+, \quad \alpha > 0.$$

2 Równanie Fishera/KPP (Kolmogorov, Petrowski, Piskunov)

$$\frac{\partial}{\partial t} n(t,x) - \Delta n(t,x) = \alpha n(t,x) \left(K - n(t,x)\right),$$

gdzie:
$n(t,x)$ - populacja znajdująca się w czasie t w miejscu x, $x \in \mathbb{R}^d$.

Równanie Allena-Cahna:

$$\frac{\partial}{\partial t} n(t,x) - \Delta n(t,x) = n(t,x) \left(1 - n(t,x)\right) \left(n(t,x-\alpha)\right),$$

gdzie $0 < \alpha < 1$.

3 Model Lotki - Volterry (ofiara - drapieżca)

$$\begin{cases} \dfrac{dF}{dt} = \alpha F - \beta F P, \\[2ex] \dfrac{dP}{dt} = \gamma P F - \mu P, \end{cases}$$

gdzie:
F - populacja ofiar,
P - populacja drapieżców,
α - współczynnik wzrostu populacji ofiar,
βP - współczynnik zjadania ofiar (zależny od P),
μ - współczynnik umierania drapieżców,
γP - współczynnik wzrostu populacji drapieżców (zależny od F).

Uogólnienie:

$$\frac{dN_i(t)}{dt} = N_i(t) F_i(N_1(t), N_2(t), \ldots, N_I(t)), \quad i = 1, 2, \ldots, I,$$

N_i - populacja gatunku i,
F_i - wzrostu populacji gatunku i, np:

$$F_i(N_1, N_2, \ldots, N_I) = r_i + \sum_{j=1}^{I} a_{ij} N_j.$$

4 Model Resensweiga - MacArthura

$$\begin{cases} \dfrac{dF}{dt} = \alpha F \left(1 - \dfrac{F}{K}\right) - I_{max} \dfrac{F}{F_h + F} P, \\ \\ \dfrac{dP}{dt} = \bar{\gamma} \dfrac{F}{F_h + F} P - \mu P, \end{cases}$$

gdzie:
F - populacja ofiar (glony),
P - populacja drapieżców (delfiny),
α - maksymalny współczynnik wzrostu populacji ofiar,
K - pojemność ekosystemu ofiar,
I_{max} - maksymalny współczynnik zjadania ofiar,
F_h - współczynnik połowicznego zjadania ofiar,
$\bar{\gamma}$ - współczynnik efektywności przetwarzania ofiar,
μ - współczynnik śmiertelności drapieżców.

5 Chemostat - kilka pożywek

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} S_i(t) = R[S_{0i} - S_i(t)] - S_i(t)\eta_i n(t), \\ \\ \dfrac{d}{dt} n(t) = n(t) \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{I} S_i(t)\eta_i - R \right), \end{cases}$$

gdzie:
S_i - pożywienie ($i = 1, 2 \dots, I$),
$n(t)$ - biomasa mikroorganizmu,
$(S_{0i})_{i-1,\dots,I}$ - wektor napływu "czystego" pożywienia,
$-RS_i(t)$ oraz $-Rn(t)$ - odpływ mieszanki ze współczynnikiem R.
Zachodzi prawo masy całkowitej ($\forall t \geq 0$):

$$M(t) = \sum_{i=1}^{I} S_i(t) + n(t),$$

$$\frac{d}{dt} M(t) = T \left(\sum_{i=1}^{I} S_{0i} - M(t) \right).$$

-

6 Model van der Pola (bicia serca)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ay, \\ \\ \dot{y}(t) = -x + Ay(1 - x^2). \end{cases}$$

7 Równanie Fitzhugha - Nagumo (impulsy elektryczne)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \dfrac{1}{\varepsilon}[x(1-x^2) - y], \\ \\ \dot{y}(t) = x - x_1, \end{cases}$$

gdzie $\varepsilon > 0$ jest małe.

8 Równanie Fitzhugha - Nagumo ("concentration pulses")

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \dfrac{1}{\varepsilon}[x(1-x^2) - (1+x)y], \\ \\ \dot{y}(t) = [\psi_\infty(x) - y], \end{cases}$$

gdzie:
$x(t) + 1$ - koncentracja,
ψ_∞ jest wybrana np.:

$$\psi_\infty = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \text{rosnąca}, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

9 Równanie Fitzhugha - Nagumo (rozchodzenia się fal)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} n(t,x) - \varepsilon \Delta n = \dfrac{1}{\varepsilon} n[(1-n)(n-\alpha) - v], \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial t} v(t,x) = v_\infty(n) - v. \end{cases}$$

10 Virusy i system immunologiczny

$$\begin{cases} \dfrac{df}{dt} = \alpha - \mu_f f - \beta f v, \\ \\ \dfrac{dc}{dt} = \beta f v - \mu_c c, \\ \\ \dfrac{dv}{dt} = \gamma c - \mu_v v, \end{cases}$$

gdzie:
$v(t)$ - populacja virusów,
$f(t)$ - populacja niezarażonych komórek (jedzenie),
$c(t)$ - populacja zarażonych komórek.

11 Zjadliwość nowotworu

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} n_1(t,x) - \dfrac{\partial}{\partial x}[x(A_1(t) - A_2(t))n_1] = [\alpha_1 x - \beta A_2(t)]n_1, \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial t} n_2(t,x) + \dfrac{\partial}{\partial x}[-\gamma x A_1(t) n_2] = \alpha_2 x A_1(t) n_2, \\ \\ A_i(t) = \displaystyle\int_{\{x \geq 0\}} x n_i(t,x) dx, \end{cases}$$

gdzie:
$n_1(t,x)$ - populacja komórek nowotworowych (z aktywacją $x \geq 0$),
$n_2(t,x)$ - populacja komórek immunologicznych (ze zdolnością obronną $x \geq 0$)
α_1 - współczynnik wzrostu populacji komórek nowotworowych (stałe pożywienie),
α_2 - współczynnik wzrostu populacji komórek immunologicznych (stałe pożywienie),
β - współczynnik zabijania komórek nowotworowych przez komórki immunologiczne,
$A_2(t)$ - współczynnik przeszkadzania naturalnego rozrostu komórek nowotworowych przez system immunologiczny,
$A_1(t)$ - współczynnik osłabiania systemu immunologicznego przez komórki nowotworowe.

12 Model SI

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = B - \mu_S S - \gamma_S S I, \\ \\ \dfrac{dI}{dt} = \gamma_S S I - \mu_I I, \end{cases}$$

gdzie:
S - populacja podatna za zarażenie,
I - populacja zarażonych,
B - współczynnik urodzeń,
γ_S - współczynnik zarażeń poprzez kontakt z zarażonymi,
μ_S - współczynnik umieralności populacji podatnej na zarażenie,
μ_I - współczynnik umieralności zarażonych ($\mu_I > \mu_S$),
$N = S + I$ - cała populacja.

13 Model SIR

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = \beta_S(S+I+R) - \mu_S S - \gamma_S SI, \\ \\ \dfrac{dI}{dt} = \gamma_S SI - \mu_I I - \beta_R I, \\ \\ \dfrac{dR}{dt} = \beta_R I - \mu_R R, \end{cases}$$

gdzie:
S - populacja podatna za zarażenie,
I - populacja zarażonych,
R - populacja wyleczonych i odpornych,
β_S - współczynnik urodzeń podatnych na zarażenie (zależny od całej populacji),
γ_S - współczynnik zarażeń poprzez kontakt z zarażonymi,
μ_S - współczynnik umieralności populacji podatnej na zarażenie,
μ_R - współczynnik umieralności populacji odpornej,
μ_I - współczynnik umieralności populacji zarażonych ($\mu_I > \mu_S$ i $\mu_I > \mu_R$),
β_R - współczynnik wyleczeń,
$N = S + I + R$ - cała populacja.

14 Model Kermacka - McKendricka

$$\frac{d}{dt}S(t) = B - \mu_S S(t) - \lambda_s(t)S(t),$$

$$\lambda_S(t) = \int_0^\infty \kappa(x)n(t,x)dx,$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}n(t,x) + \dfrac{\partial}{\partial x}n(t,x) + (\mu_i + \beta_n(x))n(t,x) = 0, \\ \\ n(t,0) = \lambda_S(t)S(t), \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}R(t) = \int_0^\infty \beta_n(x)n(t,x)dx,$$

gdzie:
$n(t,x)$ - populacja z chorobą w wieku x, (zastępuje $I(t)$ w modelu SIR)
$\lambda_S(t)$ - współczynnik zarażania populacji podatnej od populacji zarażonej w zależoności od czasu x jaki minął od zarażenia poprzez współczynnik $\kappa(x)$.

15 Model z odpornością

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial n(t,x)}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial x}(v_n(x)n(t,x)) = (\beta_n - \mu_n)n(t,x) - \gamma \displaystyle\int_0^1 K(x,x')n(t,x)p(t,x')dx', \\
\\
\dfrac{\partial p(t,x)}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial x}(v_p(x)p(t,x)) = -\mu_p p(t,x) + \gamma \displaystyle\int_0^1 K(x,x')n(t,x)p(t,x')dx',
\end{cases}
$$

gdzie:
n - populacja niezarażonych królików z odpornością poziomu x,
β_n - współczynnik urodzeń królików,
γ - wsółczynnik zarażeń narażonyck królików od zarażonych,
p - populacja zarażonych królików (pochodzą z populacji n),
μ_n - współczynnik umieralności w populacji n,
μ_p - współczynnik umieralności w populacji p.

16 Chemostat z kilkoma mikroorganizmami

$$
\begin{cases}
\dot{S}(t) = R(S_0 - S) - \displaystyle\sum_{j=1}^{I} \eta_j(S)N_j, \\
\\
\dot{N}_i(t) = N_i(\eta_i(S) - R), \\
\\
S(0) = S^0 > 0, \;\; N_i(0) = N_i^0 > 0, \;\; \forall i = 1, \ldots, I,
\end{cases}
$$

gdzie:
$S(t)$ - pożywka,
$N_i(t)$ - biomasa i-tego mikroorganizmu w chemostacie,
R - szybkość rozcieńczania wejściowego stężenia pożywki S_0,
$\eta_i(S)$ - szybkość zjadania pożywki przez i-ty mikroorganizm.

17 Chemostat - model ciągły

$$
\begin{cases}
\dot{S}(t) = R(S_0 - S) - \displaystyle\int_{x>0} \eta(x,S)n(t,x)dx, \;\; t \geq 0, \; x > 0, \\
\\
\frac{\partial}{\partial t}n(t,x) = n(t,x)(\eta(x,S) - R), \\
\\
S(0) = S^0 > 0, \;\; n(0,x) = n^0(x) > 0, \;\; n^0 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^+)
\end{cases}
$$

18 Fitoplankton

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}n(t,z) + \upsilon_p \frac{\partial}{\partial z}n(t,z) - \kappa \frac{\partial^2}{\partial z^2}n(t,z) = f(z, S(t,z[n])n(t,z), \\ \\ \kappa \frac{\partial}{\partial z}n(t,0) + \upsilon_p n(t,0) = 0, \\ \\ n(,t,z) \to 0 \;\text{ as } z \to \infty, \end{cases}$$

gdzie:
z - współrzędna pionow skierowana w dół ($z = 0$ - poziom wody),
$n(t,z)$ - populacja w chwili t na głębokości z,
υ_p - prędkość pionowa grawitacyjnego opadania.