Analiza danych w ubezpieczeniach majątkowych

Monika Wrzosek

Instytut Matematyki
Uniwersytet Gdański

2019/20

Sprawy organizacyjne

Kontakt i strona

- E-mail: mwrzosek@mat.ug.edu.pl
- Konsultacje: p.323
- Materiały: `www.mat.ug.edu.pl/~mwrzosek`

Literatura

- E. Poprawska, P. Kowalczyk, W. Ronka-Chmielowiec, Metody aktuarialne. Zastosowanie matematyki w ubezpieczeniach, PWN 2006.
- W. Otto, Ubezpieczenia majątkowe. Teoria ryzyka, WNT 2004.
- J. Grandell, Aspects of risk theory, Springer 1992.
- E. Straub, Non-life Insurance Mathematics, Springer 1997.
- A. Charpenthier, Computational Actuarial Science with R, CRC 2015.

Forma zaliczenia

- Ćwiczenia:
  - 2 kolokwia ($2 \cdot 40\%$)
  - projekt (20%)
- Wykład: egzamin pisemny.

Wprowadzenie

- Ryzyko ubezpieczeniowe ma charakter losowy.
- Zmienne losowe opisujące ryzyko:
  - wartości szkód,
  - liczba szkód,
  - momenty czasowe, w których występują szkody lub straty.
- Rodzaje zmiennych wykorzystywanych do opisu:
  - wartości szkód
    - zmienne losowe ciągłe o wartościach rzeczywistych z pewnego przedziału;
  - liczby szkód
    - zmienne losowe dyskretne o skończonym lub przeliczalnym zbiorze wartości pochodzących ze zbioru liczb naturalnych.
- Zmienna losowa opisująca ryzyko powinna
  - być nieujemna,
  - mieć skończoną wartość oczekiwaną.

- Miary ryzyka ubezpieczeniowego stosowane w praktyce:
  - wartość oczekiwana,
  - odchylenie standardowe,
  - wariancja,
  - współczynnik zmienności,
  - współczynnik skośności.
- Jeżeli ryzyko jest mierzalne i w wyniku obserwacji zebrano dostatecznie dużą liczbę danych, można stosować empiryczne metody modelowania (statystyka opisowa). Miarami ryzyka ubezpieczeniowego mogą być
  - kwartyle, np. mediana,
  - dominanta,
  - odchylenie ćwiartkowe.
- Jeśli ryzyko ubezpieczeniowe potraktujemy jako pewien proces, który jest zmienny, a zmiany te zależą od czasu, to ryzyko ubezpieczeniowe dobrze charakteryzują procesy stochastyczne. Zaobserwowane dane statystyczne będą wartościami realizacji tego procesu stochastycznego i będą tworzyły szeregi czasowe.

Ryzyko w ubezpieczeniach typu *non-life*

1. Ubezpieczenia typu *non-life*
   - pol.: ubezpieczenia majątkowe i pozostałe osobowe.
2. Gdzie występują:
   - nieruchomości i mienie ruchome,
   - transport,
   - różne obszary działalności gospodarczej,
   - usługi finansowe (kredyty, gwarancje),
   - odpowiedzialność cywilna z tytułu prowadzenia działalności,
   - nieszczęśliwe wypadki, choroby, inwalidztwo itd.

Wskaźniki do określenia liczby szkód

1. **Wskaźnik częstości wypadków ubezpieczeniowych:** $\dfrac{n}{N}$

   n - liczba wypadków ubezpieczeniowych,
   N - liczba polis lub ubezpieczonych rodzajów ryzyka.

   W przypadku dostatecznie licznego portfela polis za wartość tego wskaźnika przyjmuje się przybliżoną miarę prawdopodobieństwa wystąpienia wypadku ubezpieczeniowego w badanym portfelu ryzyka.

2. **Wskaźnik rozszerzalności wypadków ubezpieczeniowych:** $\dfrac{m}{n}$

   m - liczba szkód (roszczeń),
   n - liczba wypadków ubezpieczeniowych.

   Stosuje się, gdy w danym typie ubezpieczeń obserwuje się zjawisko kumulacji rodzajów szkód, np. w ubezpieczeniach transportowych, ogniowych, powodziowych, katastroficznych i innych, gdy jeden wypadek ubezpieczeniowy powoduje kilka szkód (roszczeń).

3. **Wskaźnik częstości roszczeń:** $\dfrac{m}{N}$

   m - liczba szkód (roszczeń),
   N - liczba polis.

4. **Wskaźnik intensywności działania wypadków ubezpieczeniowych:** $\dfrac{Z}{S_m}$

   Z - suma odszkodowań,
   S_m - suma ubezpieczenia tych rodzajów ryzyka, w których wystąpiła szkoda.

   Stosowany jest w ubezpieczeniach majątkowych i opisuje w przybliżeniu, jaka przeciętnie część wartości majątku, w którym powstała szkoda, uległa zniszczeniu.

Liczba szkód

Do opisu procesu występowania wypadków ubezpieczeniowych i szkód, należy brać pod uwagę:

- trendy,
- cykle, czyli okresy nieregularnych zmian,
- krótkookresowe wahania,
- fluktuacje czysto losowe.

Intensywność występowania wypadków podlega zmianom, np.
- ulewne deszcze i gradobicia w okresie wiosenno-letnim,
- włamania do mieszkań w okresie wakacyjnym,
- stłuczki samochodowe w okresie jesiennym i zimowym.

Zmienna opisująca liczbę szkód może zmieniać się w czasie, np. z powodu
- nowych metod zapobiegania pożarom,
- zmian warunków handlowych,
- zmian technologicznych,
- większej prewencji.

Wartość szkód

- Wielkości szkód są najczęściej małe i średnie, stąd liczba danych obserwowalnych jest duża, co pozwala zastosować modelowanie empiryczne i utworzyć szereg rozdzielczy oraz wyznaczyć dystrybuantę empiryczną.
- Wielkie odszkodowania występują rzadko, czyli z małymi prawdopodobieństwami, i stąd mało jest o nich danych. Zatem lepiej jest zastosować modelowanie teoretyczne, czyli założyć hipotetyczny rozkład i zweryfikować hipotezę o rozkładzie za pomocą statystycznych testów istotności nieparametrycznych.
- Wielkości szkód należy analizować w kontekście czasowym i przestrzennym, gdyż mogą one być zmienną czasu i występować ze zróżnicowanymi wartościami w różnych regionach.
- W przypadku danych z poprzednich i odległych momentów czasowych należy uwzględnić inflację.
- Wartości szkód (roszczeń) są związane z sumą ubezpieczenia, czyli górną granicą odpowiedzialności ubezpieczyciela, lub z decyzjami reasekuracyjnymi, które ustalają udział własny ubezpieczyciela i automatycznie określają górną granicę zbioru obserwacji.
- Rozkład prawdopodobieństwa wartości tej zmiennej jest przeważnie asymetryczny i w przypadku dużych roszczeń, z tak zwanym wyciągniętym i ciężkim ogonem.
- Wartości szkód przyjmują wartości rzeczywiste i dlatego opisują je zmienne losowe ciągłe.

Modele ryzyka ubezpieczeniowego w ubezpieczeniach typu *non-life*

1. Modele dyskretne

K - zmienna losowa dyskretna

- o wartościach $0, 1, 2, \ldots$ oznaczających liczbę szkód wygenerowanych przez jednen typ ryzyka lub portfel ryzyka w badanym okresie,
- z prawdopodobieństwami odpowiednio $p_0, p_1, p_2, \ldots$, tzn.

$$P(K = k) = p_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Stosowane rozkłady prawdopodobieństwa dla zmiennej K

- dwumianowy,
- Poissona,
- ujemny dwumianowy,
- logarytmiczny.

Rozkład dwumianowy

- Portfel ubezpieczeń zawiera N jednorodnych rodzajów ryzyka.
- Prawdopodobieństwo wystąpienia szkody w każdym z nich w ciągu roku jest takie samo i wynosi p.
- Prawdopodobieństwo niewystąpienia szkody wynosi $q = 1 - p$.

$$p_k = P(K = k) = \binom{N}{k} p^k q^{N-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, N$$

- $\mathbb{E}K = Np$,
- $Var\ K = Npq$.

Rozkład Poissona

- W praktyce na ogół występują duże portfele ryzyka.
- W ubezpieczeniach majątkowych prawdopodobieństwo wystąpienia szkody w pojedynczym typie ryzyka jest przeważnie bardzo małe.

$$p_k = P(K = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots, \ \lambda = Np.$$

- $\mathbb{E}K = \lambda$,
- $Var\ K = \lambda$.

Rozkład ujemny dwumianowy

- W sytuacjach, gdy wariancja liczby szkód przekracza średnią.

$$p_k = P(K = k) = \binom{\alpha + k - 1}{k} q^k p^\alpha \quad k = 0, 1, \ldots, \ \alpha \in (0, \infty), \ p \in (0, 1).$$

- p - prawdopodobieństwo wystąpienia szkody, $q = 1 - p$,
- p_k - prawdopodobieństwo wystąpienia α-tej kolejnej szkody po k bezszkodach,
- $\mathbb{E}K = \alpha \frac{q}{p}$,
- $Var\, K = \alpha \frac{q}{p^2}$.
- Jeżeli $\alpha = 1$, to rozkład ten przekształca się w rozkład geometryczny postaci $p_k = pq^k$, gdzie p_k - prawdopodobieństwo wystąpienia szkody po k bezszkodach.

Rozkład logarytmiczny

$$p_k = P(K = k) = \frac{p^k}{k|\ln(1-p)|} \quad k = 1, 2, \ldots, \; p \in (0,1), q = 1 - p.$$

- $\mathbb{E}K = \frac{p}{|\ln q|}\frac{1}{q}$,
- $Var\, K = \frac{p}{|\ln q|^2}\frac{1}{q}(|\ln q| - p)$.

2. Model akumulacyjny liczby szkód i roszczeń

- N - zmienna losowa opisująca liczbę wypadków ubezpieczeniowych,
- J - zmienna losowa opisująca liczbę roszczeń pochodzących z jednego wypadku,
- p_n - prawdopodobieństwo wystąpienia n wypadków,
- q_j - prawdopodobieństwo wystąpienia j roszczeń w jednym wypadku,
- K - zmienna losowa opisująca liczbę roszczeń z wszystkich wypadków.

$$P(K=k)=\sum_{n=0}^{k} p_n q_k^n, \quad q_k^1=q_k, \quad q_k^0=\begin{cases}1, & \text{jeśli } K=0,\\ 0, & \text{jeśli } K\neq 0,\end{cases}$$

gdzie q_k^n - prawdopodobieństwo zdarzenia, że wystąpi k szkód w n wypadkach, określające rozkład sumy n niezależnych zmiennych losowych $J_1+J_2+\ldots J_n$

$$
\begin{aligned}
P(K=0) &= p_0, \\
P(K=1) &= p_1 q_1, \\
P(K=2) &= p_1 q_2 + p_2 q_1^2, \\
P(K=3) &= p_1 q_3 + p_2 2 q_1 q_2 + p_3 q_1^3, \\
P(K=4) &= p_1 q_4 + p_2(2q_1 q_3 + q_2^2) + p_3 3 q_1^2 q_2 + p_4 q_1^4,
\end{aligned}
$$

Interpretacja:

$P(K=2)$: prawdopodobieństwo zajścia jednej z dwóch możliwości: jeden wypadek z dwoma roszczeniami albo dwa wypadki, każdy tylko z jednym roszczeniem.

$P(K=3)$: prawdopodobieństwo zajścia jednej z trzech możliwości: jeden wypadek z trzema roszczeniami albo dwa wypadki z jednym i dwoma roszczeniami, albo trzy wypadki, każdy z pojedynczym roszczeniem.

Uwaga: Jeżeli N jest zmienną losową o rozkładzie Poissona, a J jest zmienną losową o rozkładzie logarytmicznym, to K ma rozkład ujemny dwumianowy.

3. Model dynamiczny liczby szkód

Gdy uwzględnimy wpływ czasu na proces występowania szkód otrzymamy modele dynamiczne opisujące ich liczbę.

Jednorodny rozkład Poissona

- Najczęściej stosuje się jednorodny proces Poissona z niezależnymi i stacjonarnymi przyrostami.
- Model ten stosuje się w przypadku takiego typu ryzyka, lub całego portfela, dla których intensywność występowania szkód jest stała.

$$p_k(t) = P(K(t) = k) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots, \ \lambda > 0.$$

- $\mathbb{E}[K(t)] = \lambda t$,
- $Var\,[K(t)] = \lambda t$.

Niejednorodny rozkład Poissona

- W praktyce często warunek jednorodności procesu nie jest spełniony, szczególnie dla ryzyka o charakterze przyrodniczym, katastrofalnym, którego realizacji towarzyszą zmiany w otoczeniu.
- Jeśli charakter tych zmian można określić za pomocą pewnej funkcji intensywności $\Lambda(t)$, to

$$p_k(t) = P(K(t) = k) = \frac{e^{-\Lambda(t)}[\Lambda(t)]^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots, \ \lambda > 0.$$

- $\mathbb{E}[K(t)] = \Lambda(t)$,
- $Var\,[K(t)] = \Lambda(t)$.

Mieszany rozkład Poissona

- W przypadku ryzyka katastrofalnego często warunek o funkcji intensywności zależnej od t nie jest spełniony.
- Zmiany intensywności szkód mają charakter losowy i należy wprowadzić zmienną losową mieszającą Q $(Q > 0)$, od której uzależniona jest zmienna losowa K.
- Problem sprowadza się do znalezienia rozkładu zmiennej losowej Q, co w niektórych przypadkach jest możliwe przy wykorzystaniu danych meteorologicznych, hydrologicznych, sejsmicznych itp.

$$p_k = \mathbb{E}[p_k(\lambda Q)] = \int_0^{\infty} e^{-\lambda q} \frac{(\lambda q)^k}{k!} dG(q),$$

gdzie G - dystrybuanta zmiennej losowej Q, $G(q) = P(Q \leq q)$.

Interpretacja: Prawdopodobieństwo względem mieszanego rozkładu Poissona oblicza się jako średnie ważone, uwzględniając przy tym wszystkie możliwe stany podstawowych czynników ryzyka opisywanych przez zmienną mieszającą Q.

Mieszany rozkład Poissona

Niech

- g_i, takie że $P(Q = q_i) = g_i$,
- $\mathbb{E}Q = 1$, tzn. intensywność występowania szkód w pewnym okresie powinna być na oczekiwanym poziomie.

Wtedy zachodzi wzór $\sum q_i g_i = 1$.

Dystrybuanta zmiennej losowej K jest postaci $F(k) = \sum_{i \le k} F_{\lambda q_i}(k) g_i$.

Przykład: Badaną zmienną jest liczba zalanych domostw w lipcu z powodu powodzi. Zmienną tę można modelować za pomocą mieszanego rozkładu Poissona z wartością oczekiwaną λ obliczoną na podstawie długiego okresu. Warunki pogodowe w lipcu opisuje zmienna mieszająca Q, która na podstawie danych empirycznych ma rozkład:

i	Typ pogody	q_i	g_i	$q_i g_i$
1	Bardzo sucho	3	0.04	0.12
2	Sucho	2	0.15	0.30
3	Normalnie	0.8	0.45	0.36
4	Mokro	0.7	0.20	0.14
5	Bardzo mokro	0.5	0.16	0.08
Σ	–	–	1.0	1.0

Aby uwzględnić zmiany pogodowe, wartość średnią λ należy pomnożyć przez odpowiednie wartości zmiennej mieszającej Q, która te zmiany pogodowe opisuje, a następnie odczytać wartości z tablic rozkładu Poissona.

W zagadnieniach praktycznych istotnym problemem jest znalezienie postaci dystrybuanty rozkładu zmiennej mieszającej Q. Często przyjmuje się dystrybuantę rozkładu gamma opartą o postać funkcji gamma.

Rozkład gamma

$$g(q) = \frac{a^r}{\Gamma(r)} e^{aq} q^{r-1}, \quad q > 0,$$

gdzie:

- dwa parametry: $r > 0$, $a > 0$;
- funkcja gamma:
$$\Gamma(r) = \int_0^\infty e^{-u} u^{r-1} du;$$
- wartość oczekiwana rozkładu gamma: $\frac{r}{a}$.

Po standaryzowaniu, tak aby $E(Q) = 1$, czyli $r = a$, wprowadza się zmienną $g = r$. Wtedy dystrybuanta zmiennej losowej Q przyjmuje postać

$$G(q) = \int_0^{gq} \frac{1}{\Gamma(g)} e^{-z} z^{g-1} dz.$$

Wtedy $\mathbb{E}Q = 1, \quad Var\,X = \frac{1}{g}$.

4. Model wartości indywidualnej szkody lub roszczenia

Wartość indywidualnej szkody (lub indywidualnego roszczenia) może być modelowana za pomocą zmiennej losowej ciągłej nieujemnej X, takiej że $\mathbb{E}[X] < \infty$, $Var\,[Q] < \infty$ i o pewnej dystrybuancie F.

Metody znajdowania dystrybuanty F i jej parametrów:

- Konstruowanie empirycznej postaci dystrybuanty na podstawie obserwacji z poprzedniego okresu zestawionych w szeregi czasowe.
- Szukanie analitycznej postaci dystrybuanty wyrażonej wzorem i w tym celu wykorzystanie statystycznych testów istotności (np. χ^2, λ-Kołmogorowa, Kołmogorowa-Smirnowa) do zweryfikowania hipotezy o postaci dystrybuanty.
- Obliczanie na podstawie danych empirycznych podstawowych parametrów rozkładu bez szukania postaci dystrybuanty.

Stosowane rozkłady

- gamma,
- Pareto,
- beta,
- logarytmiczno-normalny,
- normalny.

Rozkłady gamma

Funkcja gęstości:

$$f(x) = \frac{1}{\mu^\gamma \Gamma(\gamma} x^{\gamma-1} e^{-\frac{x}{\mu}}, \quad x > 0$$

z dwoma parametrami, gdzie $\mu > 0$, a funkcja gamma Γ zadana jest wzorem

$$\Gamma(\gamma) = \int_0^\infty x^{\gamma-1} e^{-x} dx, \quad \gamma > 0.$$

Wtedy.

- $\mathbb{E}X = \mu\gamma$,
- $Var\, X = \mu^2\gamma$.

Dla $\gamma = 1$ otrzymujemy rozkład wykładniczy o funkcji gęstości $f(x) = \frac{1}{\mu} e^{\frac{-x}{\mu}}$.

Rozkład gamma dla

- $\gamma \leq 1$ charakteryzuje typy ryzyka o małych roszczeniach,
- $\gamma > 1$ charakteryzuje typy ryzyka o dużych roszczeniach.

Rozkład Pareto

Dystrybuanta:

$$F(x) = 1 - \frac{1}{(1+x)^{\alpha}}, \quad x \geq 0,\ 0 < \alpha < \infty.$$

Wtedy

- $\mathbb{E}X = \frac{1}{\alpha-1}, \quad \alpha > 1,$
- $\mathbb{E}[X^2] = \frac{2}{(\alpha-1)(\alpha-2)}, \quad \alpha > 2.$

Ucięty rozkład Pareto

Dystrybuanta:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{(1+x)^{\alpha}}, & 0 \leq x < M < \infty, \\ 1, & x \geq M, \end{cases}$$

gdzie M nazywa się maksymalną możliwą stratą.

Funkcja gęstości:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha \frac{1}{(1+x)^{\alpha}}, & 0 \leq x < M < \infty, \\ 0, & x \geq M. \end{cases}$$

Rozkład beta

Funkcja gęstości:

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1},$$

gdzie parametry α, β spełniają

$$0 < \alpha < \infty, \quad 0 < \beta < \infty.$$

Wtedy

- $\mathbb{E}X = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$,
- $\mathbb{E}[X^2] = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}$.

Rozkład logarytmiczno-normalny

Funkcja gęstości:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} x \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right),$$

gdzie $0 < x < \infty, \ -\infty < \mu < \infty, \ 0 < \sigma < \infty.$

Wtedy

- $\mathbb{E}X = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$,
- $Var\, X = e^{2\mu + \sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$.

Rozkład normalny

Funkcja gęstości:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad \sigma > 0$$

Wtedy

- $\mathbb{E}X = \mu$,
- $Var\, X = \sigma^2$.

5. Ryzyko katastrofalne

- Pojęcie ryzyka katastrofalnego jest trudne do zdefiniowania.
- Ma ono charakter względny: jeśli weźmiemy pod uwagę możliwości kapitałowe zakładu ubezpieczeń w postaci kapitałów własnych i funduszy ubezpieczeniowych, to to samo ryzyko ubezpieczeniowe dla jednego zakładu ubezpieczeń jest już katastrofalne, a dla drugiego jeszcze nie.
- Ryzyko ma cechy katastrofalne, jeśli jego realizacja generuje wielkie szkody losowe, które mogą wystąpić w jednym lub w wielu obiektach i które mogą być kumulacją bardzo dużej liczby nawet drobnych szkód powstałych w wyniku katastrofy naturalnej lub spowodowanej przez człowieka.

Ryzyko katastrofalne charakteryzuje się tym, że

- niespełniony jest warunek o niezależności występowania szkód,
- prawdopodobieństwo jego realizacji jest bardzo małe i trudne do oszacowania,
- nie zachodzi warunek powtarzalności jednorodnych szkód, który pozwala korzystać z prawa wielkich liczb, a który jest jedną z cech ubezpieczalności ryzyka,
- szkody powstałe w wyniku realizacji ryzyka katastrofalnego pojawiają się prawie w tym samym czasie.

Do modelowania wartości szkód pochodzących ze zdarzeń katastrofalnych wykorzystywane są rozkłady wartości ekstremalnych.

Rozkład Frecheta

Dystrybuanta:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \exp(-x^{-\alpha}), & x > 0, \end{cases}$$

gdzie parametr $\alpha > 0$.

Rozkład Weibulla

Dystrybuanta:

$$F(x) = \begin{cases} \exp[-(-x)^{-\alpha}], & x \leq 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

gdzie parametr $\alpha > 0$.

Rozkład Gumbela

Dystrybuanta:

$$F(x) = \exp[-\exp(-x)].$$

Rozkład Pareto - analityczna postać trójparametryczna

Dystrybuanta:

$$F(x) = 1 - \left(\frac{D+\beta}{x+\beta}\right)^{\alpha}, \quad x \geq D,$$

gdzie parametry α, β, D spełniają $\alpha > 0$, $\beta > -D$.

- Parametr α decyduje o wadze ogona dystrybuanty. Im α jest mniejsze, tym cięższy jest ogon.
- Parametr β określa lewą stronę dystrybuanty, gdzie x jest większe od β, dlatego nie ma wpływu na jej ogon. Zatem, jeśli krzywą Pareto dopasowujemy tylko do ogona dystrybuanty, a tak postępuje się często w przypadku zdarzeń katastrofalnych, to parametr β można pominąć.
- Parametr D jest początkiem przedziału wartości odszkodowań.

- $\mathbb{E}X = \dfrac{\alpha D + \beta}{\alpha - 1}$, $\alpha > 1$.
- $Var\, X = \dfrac{\alpha(D+\beta)^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$.

Gdy $\alpha \leq 1$, to nie istnieje wartość oczekiwana rozkładu;
Gdy $\alpha \leq 2$ to nie istnieje skończona wariancja.

W praktyce, przy szukaniu rozkładu teoretycznego stosuje się różne metody obcięcia części ogona, aby uniknąć problemu istnienia nieskończonych momentów rozkładu.

Uzasadnione jest to stosowaniem różnych limitów, które z góry ograniczają odpowiedzialność zakładów ubezpieczeń albo stosowana jest reasekuracja, powszechna szczególnie w przypadku ubezpieczeń katastrofalnych.

Metody obcięcia ogona

- Dystrybuanta "cenzurowana" (*censored distribution*):

$$F_C(x) = \frac{F(x)}{F(C)}, \quad x < C,$$

  gdzie odszkodowania powyżej wartości C nie są uwzględniane.

- Dystrybuanta "ucięta" (*truncated distribution*):

$$F_{tr}(x) = \begin{cases} 0, & x \geq x_{max}, \\ F(x), & x < x_{max}. \end{cases}$$

  Odszkodowania powyżej x_{max} nie są brane pod uwagę. Sytuacja taka wystąpi wtedy, gdy szkody większe od x_{max} nie są objęte ochroną ubezpieczeniową lub są oddane do reasekuratora.