

1. Spośród wierzchołków graniastosłupa prawidłowego trójkątnego, którego wszystkie krawędzie mają długość 1, wybieramy losowo 3 różne wierzchołki. Obwód otrzymanego trójkąta jest zmienną losową X . Podaj rozkład zmiennej losowej X .

2. Dany jest rozkład zmiennej losowej X

$X = x_i$	-1	1	2	3
$P(X = x_i)$	1/8	1/8	1/4	c

1. Wyznacz wartość stałej c .
2. Oblicz $P(X \in (0, 2])$.
3. Oblicz wartość oczekiwaną zmiennej losowej X .
4. Oblicz wariancję zmiennej losowej X .

3. Sprawdź, czy funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}(1 + x^2), & x \in (0, 1), \\ 0, & x \notin (0, 1). \end{cases}$$

jest gęstością pewnej zmiennej losowej.

4. Dana jest gęstość zmiennej losowej X

$$f(x) = \begin{cases} c(x + 2), & x \in (1, 5), \\ 0, & x \notin (1, 5). \end{cases}$$

1. Wyznacz wartość stałej c .
2. Oblicz i zaznacz na wykresie gęstości $P(X \in (2, 4))$.
3. Wyznacz dystrybuantę F .
4. Oblicz $P(X \in (2, 4))$ za pomocą dystrybuanty.
5. Oblicz wartość oczekiwaną zmiennej losowej X .
6. Oblicz wariancję zmiennej losowej X .

5. Dana jest dystrybuanta zmiennej losowej X

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ \frac{1}{16}(x - 1)^2, & 1 < x \leq 5, \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

1. Oblicz $P(X \in (2, 4))$, korzystając ze wzoru na dystrybuantę.
2. Zaznacz na wykresie dystrybuanty prawdopodobieństwo otrzymane w punkcie 1.
3. Wyznacz gęstość zmiennej losowej X .

6. Oblicz i zaznacz na wykresie medianę zmiennej losowej X o dystrybuancie

$$1. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{dla } x < 0, \\ 0.1, & \text{dla } x \in [0, 1), \\ 0.2, & \text{dla } x \in [1, 2), \\ 0.6, & \text{dla } x \in [2, 3), \\ 1, & \text{dla } x \geq 3. \end{cases} \quad 2. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{dla } x < 0, \\ 0.1, & \text{dla } x \in [0, 1), \\ 0.2, & \text{dla } x \in [1, 2), \\ 0.5, & \text{dla } x \in [2, 3), \\ 1, & \text{dla } x \geq 3. \end{cases}$$

7. Oblicz kwantyl rzędu 0.375 zmiennej losowej X o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & x \in (0, 1) \\ 0, & x \notin (0, 1) \end{cases}$$

8. Rozkład łączny pary zmiennych losowych dyskretnych X i Y zadany jest tabelą

	Y			
X		-2	0	1
	0	0.1	0	0.2
	2	0.2	0.2	0.3

1. Wyznacz rozkład brzegowy zmiennej losowej X .
2. Wyznacz rozkład brzegowy zmiennej losowej Y .
3. Sprawdź, czy zmienne losowe X i Y są niezależne.
4. Oblicz kowariancję zmiennych losowych X, Y .

9. Rozkład łączny pary zmiennych losowych dyskretnych X i Y zadany jest tabelą

	Y		
X		0	2
	-1	0.045	0.055
	3	0.405	0.495

1. Sprawdź, czy zmienne losowe X i Y są niezależne.
2. Oblicz kowariancję zmiennych losowych X, Y .

10. Dana jest gęstość wektora losowego (X, Y)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{8}(x^2y + y), & x \in (0, 1), y \in (0, 2), \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

1. Wyznacz rozkład brzegowy zmiennej losowej X .
2. Wyznacz rozkład brzegowy zmiennej losowej Y .
3. Sprawdź, czy zmienne losowe X i Y są niezależne.
4. Oblicz kowariancję zmiennych losowych X, Y .

11. Czy \mathcal{F} jest σ -ciałem podzbiorów Ω ? Odpowiedź uzasadnij.

1. $\Omega = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \Omega\}$.
2. $\Omega = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \Omega\}$.

12. Czy

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}, \dots, \mathbb{N}\}$$

jest σ -ciałem podzbiorów \mathbb{N} ? Odpowiedź uzasadnij.

13. Czy \mathcal{F} jest σ -ciałem podzbiorów Ω ? Odpowiedź uzasadnij.

1. $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, (5, \infty), (-\infty, 5), \{5\}, \Omega\}$.
2. $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, (5, \infty), (-\infty, 5], \Omega\}$.

14. Niech $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 4\}$, $B = \{2\}$. Wyznacz σ -ciało generowane przez zbiory A, B , tzn. $\sigma(A, B)$.

15. Niech $\Omega = \mathbb{R}$. Wyznacz $\sigma((-1, 2), (5, 6))$.

16. Sprawdź, czy zmienne losowe X i Y są \mathcal{F} -mierzalne, jeżeli $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{\omega_1, \omega_2, \omega_6, \omega_8\}, \{\omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_7\}\}$,

$$X(\omega) = \begin{cases} 10, & \omega \in \{\omega_1, \omega_2, \omega_6, \omega_8\} \\ 20, & \omega \in \{\omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_7\} \end{cases} \quad Y(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_8\} \\ 5, & \omega \in \{\omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7\} \end{cases}$$

17. Wyznacz warunkowe wartości oczekiwane $\mathbb{E}[X|Y]$ i $\mathbb{E}[Y|X]$, gdy zmienne losowe mają rozkład łączny zadany tabelą

1.

	Y	1	2
X			
-2		0	2/6
0		1/6	1/6
3		0	2/6

2.

	Y	0	2	4	5
X					
1		0.1	0.1	0.4	0
10		0.2	0	0.1	0.1

18. Niech $\Omega = [0, 1]$, P -miara Lebesgue'a na $[0, 1]$. Wyznacz $\mathbb{E}[f|\mathcal{F}]$, jeżeli $f(x) = \sqrt{x}$, \mathcal{F} jest σ -ciałem generowanym przez zbiory $A_1 = [0, \frac{1}{4}]$, $A_2 = [\frac{1}{4}, 1]$.

19. Niech $\Omega = [0, 1]$, P -miara Lebesgue'a na $[0, 1]$. Wyznacz $\mathbb{E}[f|\mathcal{F}]$, jeżeli $f(x) = x^2$, \mathcal{F} jest σ -ciałem generowanym przez zbiory $A_1 = [0, \frac{1}{10}]$, $A_2 = [\frac{1}{10}, \frac{1}{5}]$, $A_3 = [\frac{1}{5}, 1]$.

Elementy ekonomiki ubezpieczeń

20. Pokaż, że funkcja u spełnia własności funkcji użyteczności.

1. $u(x) = -e^{-\alpha x}$ dla ustalonego $\alpha > 0$
2. $u(x) = x^\gamma$ dla wszystkich $x > 0$ i ustalonego $\gamma \in (0, 1)$
3. $u(x) = x - \alpha x^2$ dla ustalonego $\alpha > 0$ i wszystkich $x < \frac{1}{2\alpha}$

21. Decydent posługuje się funkcją użyteczności $u(x) = -e^{-\alpha x}$, gdzie $\alpha > 0$ jest ustalone. Pokaż, że maksymalna cena ubezpieczenia, jaką decydent jest gotów zapłacić za pełne ubezpieczenie straty X , jest równa

$$h = \frac{1}{\alpha} \ln(\mathbb{E}[e^{\alpha X}]).$$

22. Decydenta opisuje funkcja użyteczności $u(x) = -e^{-5x}$. W zamian za swój majątek może on otrzymać losową kwotę X o rozkładzie $N(5, 2)$ lub Y o rozkładzie $N(6, 2.5)$. Która kwota będzie preferowana przez decydenta?

Wskazówka: Jeżeli $X \sim N(m, s^2)$, to $\mathbb{E}[e^X] = e^{m + \frac{s^2}{2}}$.
 Odp. $\mathbb{E}[u(X)] = -1$, $\mathbb{E}[u(Y)] \approx -3.5$.

23. Decydenta opisuje funkcja użyteczności $u(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$. W zamian za swój majątek może on otrzymać losową kwotę X lub Y o rozkładach

$X = x_i$	400	900
$P(X = x_i)$	0.5	0.5

$Y = y_i$	100	1600
$P(Y = y_i)$	0.6	0.4

Pokaż, że dla decydenta kwota X jest korzystniejsza od kwoty Y . Wyznacz wartość majątku w , przy której powinien odrzucić ofertę.

Odp. $w < 625$.

24. Decydent posługuje się funkcją użyteczności $u(x) = x - 0.01x^2$, $x < 50$, posiadając majątek $w = 20$. Prawdopodobieństwo poniesienia szkody równej 10 wynosi 0.5, prawdopodobieństwo braku szkody wynosi 0.5. Oblicz maksymalną cenę ubezpieczenia, jaką decydent jest gotów zapłacić za pełne ubezpieczenie straty.
 Odp. $h \approx 5.36$.

25. Załóżmy, że strata X jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem $\lambda = 0.1$. Rozważmy proporcjonalny kontrakt ubezpieczeniowy

$$I(x) = \frac{1}{2}x.$$

Znajdź taką wielkość udziału własnego d , aby kontrakt typu stop-loss miał taką samą wartość oczekiwaną, czyli

$$\mathbb{E}[I_d(X)] = \mathbb{E}[I(X)].$$

Odp. $d = 10 \ln 2$.

Model ryzyka indywidualnego

26. Wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej $X = IB$, jeśli prawdopodobieństwo wystąpienia szkody wynosi 0.1, a zmienna losowa wysokości szkody B przyjmuje wartość 5 z prawdopodobieństwem 1.

Odp. $\mathbb{E} X = 0.5$, $\text{Var} X = 2.25$.

27. Zmienna losowa wysokości szkody B ma rozkład jednostajny na przedziale $[0, 20]$. Prawdopodobieństwo wystąpienia szkody wynosi 0.02.

1. Wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej B .
2. Wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej I .
3. Wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję wysokości wypłaty $X = IB$.

28. Zmienna losowa wysokości szkody B ma rozkład wykładniczy z parametrem 2. Prawdopodobieństwo wystąpienia szkody wynosi 0.05.

1. Wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej B .
2. Wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej I .
3. Wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję wysokości wypłaty $X = IB$.

Odp. $\mathbb{E} B = 0.5$, $\text{Var} B = 0.25$, $\mathbb{E} I = 0.05$, $\text{Var} I = 0.0475$, $\mathbb{E} X = 0.025$, $\text{Var} X = 0.024375$.

29. Portfel zawiera 100 niezależnych ryzyk X_1, \dots, X_{100} , każde generujące co najwyżej jedną szkodę. Ryzyka X_1, \dots, X_{80} generują szkodę równą 2 z prawdopodobieństwem 0.05, a ryzyka X_{81}, \dots, X_{100} generują szkodę równą 5 z prawdopodobieństwem 0.01. Wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję łącznej wartości szkód w tym portfelu.

Odp. $\mathbb{E} S = 9$, $\text{Var} S = 20.15$.

30. Portfel zawiera 50 niezależnych ryzyk X_1, \dots, X_{50} , każde generujące co najwyżej jedną szkodę. Ryzyka X_1, \dots, X_5 generują szkodę równą 1 z prawdopodobieństwem 0.1, ryzyka X_6, \dots, X_{40} generują szkodę równą 2 z prawdopodobieństwem 0.05, a ryzyka X_{41}, \dots, X_{50} generują szkodę równą 5 z prawdopodobieństwem 0.05. Wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję łącznej wartości szkód w tym portfelu.

Odp. $\mathbb{E} S = 6.5$, $\text{Var} S = 18.975$.

31. Portfel zawiera cztery niezależne ryzyka X_1, X_2, X_3, X_4 , każde generujące co najwyżej jedną szkodę. Prawdopodobieństwo wystąpienia szkody to odpowiednio 0.02, 0.03, 0.05, 0.1. Zmienna losowa wysokości szkody B ma rozkład jednostajny na przedziale $[0, 10]$. Wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję łącznej wartości szkód w tym portfelu.

Odp. $\mathbb{E} S = 1$, $\text{Var} S \approx 6.3217$.

32. Portfel zawiera trzy niezależne ryzyka X_1, X_2, X_3 , każde generujące co najwyżej jedną szkodę. Prawdopodobieństwo wystąpienia szkody to odpowiednio 0.01, 0.05, 0.08. Zmienna losowa wysokości szkody B ma rozkład wykładniczy z parametrem 2. Wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję łącznej wartości szkód w tym portfelu.

Odp. $\mathbb{E} S = 0.07$, $\text{Var} S = 0.06775$.

33. Portfel zawiera trzy niezależne ryzyka X_1, X_2, X_3 , każde generujące co najwyżej jedną szkodę. Prawdopodobieństwo wystąpienia szkody to odpowiednio 0.05, 0.1, 0.15. Zmienna losowa wysokości szkody B ma rozkład Poissona z parametrem 3. Wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję łącznej wartości szkód w tym portfelu.

Odp. $\mathbb{E} S = 0.9$, $\text{Var} S = 3.285$.

Sploty

34. Dwa niezależne ryzyka mają rozmiary szkód podane w tabeli

i	0	1	2	3	4
$P(X_1 = i)$	2/10	1/10	3/10	1/10	3/10

i	1	3	5
$P(X_2 = i)$	2/5	1/5	2/5

Wyznacz rozkład zmiennej $S = X_1 + X_2$.

35. Trzy niezależne ryzyka mają rozmiary szkód podane w tabeli

i	0	1	2	3
$P(X_1 = i)$	0.3	0.2	0.4	0.1
$P(X_2 = i)$	0.6	0.1	0.3	0
$P(X_3 = i)$	0.4	0.2	0	0.4

Wyznacz rozkład zmiennej $S = X_1 + X_2 + X_3$.

Odp.:

s	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_{S_2}(s)$	0.18	0.15	0.35	0.16	0.13	0.03	–	–	–
$f_S(s)$	0.072	0.096	0.170	0.206	0.144	0.178	0.070	0.052	0.012

36. Wyznacz rozkład zmiennej $S = X_1 + X_2 + X_3$, jeżeli niezależne ryzyka mają rozmiary szkód podane w tabeli.

s	0	1	2	3	4	5
$f_1(s)$	0.4	0.3	0.2	0.1	0	0
$f_2(s)$	0.5	0.2	0.1	0.1	0.1	0
$f_3(s)$	0.6	0	0.1	0.1	0.1	0.1

Odp.:

s	$f_1(s)$	$f_2(s)$	$f_3(s)$	$f^{(2)}(s)$	$f^{(3)}(s)$	$F_1(s)$	$F^{(2)}(s)$	$F^{(3)}(s)$
0	0.4	0.5	0.6	0.20	0.120	0.4	0.20	0.120
1	0.3	0.2	0.0	0.23	0.138	0.7	0.43	0.258
2	0.2	0.1	0.1	0.20	0.140	0.9	0.63	0.398
3	0.1	0.1	0.1	0.16	0.139	1.0	0.79	0.537
4		0.1	0.1	0.11	0.129	1.0	0.90	0.666
5			0.1	0.06	0.115	1.0	0.96	0.781
6				0.03	0.088	1.0	0.99	0.869
7				0.01	0.059	1.0	1.00	0.928
8					0.036	1.0	1.00	0.964
9					0.021	1.0	1.00	0.985
10					0.010	1.0	1.00	0.995
11					0.004	1.0	1.00	0.999
12					0.001	1.0	1.00	1.000

37. Uzupełnij poniższy kod tak, aby uzyskać rozkład zmiennej S z zadania 35.

```
install.packages("SuppDists")
library("SuppDists")
install.packages("kSamples")
library("kSamples")
x1=c(0,1,2,3)
p1=c(0.3,0.2,0.4,0.1)
x2=c(0,1,2,3)
p2=c(0.6,0.1,0.3,0)
conv(x1,p1,x2,p2)
```

Sploty (cd.)

38. Wyznacz dystrybuantę F_S zmiennej losowej $S = X + Y$, gdy dana jest dystrybuanta F_X zmiennej losowej ciągłej X i gęstość f_Y zmiennej losowej ciągłej Y :

$$1. \quad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{3}x, & 0 \leq x < 3, \\ 1, & x \geq 3 \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4} & 0 < y < 4, \\ 0 & \text{w przec. przyp.} \end{cases} = \frac{1}{4} \cdot \mathbf{1}_{(0,4)}(y).$$

$$2. \quad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{3}x, & 0 \leq x < 3, \\ 1, & x \geq 3 \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 < y < 2, \\ 0 & \text{w przec. przyp.} \end{cases} = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{1}_{(0,2)}(y).$$

$$\text{Odp.: } 1. \quad F_S(s) = \begin{cases} 0 & \text{dla } s < 0, \\ \frac{1}{24}s^2 & \text{dla } s \in [0, 3), \\ \frac{1}{4}s - \frac{3}{8} & \text{dla } s \in [3, 4), \\ -\frac{1}{24}s^2 + \frac{7}{12}s - \frac{25}{24} & \text{dla } s \in [4, 7), \\ 1 & \text{dla } s \geq 7. \end{cases}$$

$$\text{Odp.: } 2. \quad F_S(s) = \begin{cases} 0 & \text{dla } s < 0, \\ \frac{1}{12}s^2 & \text{dla } s \in [0, 2), \\ \frac{1}{3}(s-1) & \text{dla } s \in [2, 3), \\ -\frac{1}{12}s^2 + \frac{5}{6}s - \frac{13}{12} & \text{dla } s \in [3, 5), \\ 1 & \text{dla } s \geq 5. \end{cases}$$

39. Wyznacz gęstość sumy niezależnych zmiennych losowych X_1 i X_2 o gęstościach

$$f_1(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{dla } x \geq 0, \\ 0 & \text{dla } x < 0, \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{dla } x \notin [0, 1]. \end{cases}$$

$$\text{Odp.: } f_S(s) = \begin{cases} e^{-2s}(e^{2\min\{s,1\}} - 1) & \text{dla } s \geq 0, \\ 0 & \text{dla } s < 0. \end{cases}$$

40.¹ Wyznacz dystrybuantę zmiennej losowej $S = X_1 + X_2 + X_3$, gdzie X_1, X_2, X_3 są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie o dystrybuancie

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ x & \text{dla } x \in [0, 1), \\ 1 & \text{dla } x \geq 1. \end{cases}$$

$$\text{Odp.: } F_S(s) = \begin{cases} 0 & \text{dla } s < 0, \\ \frac{1}{6}s^3 & \text{dla } s \in [0, 1), \\ \frac{1}{6}(s^3 - 3(s-1)^3) & \text{dla } s \in [1, 2), \\ \frac{1}{6}(s^3 - 3(s-1)^3 + 3(s-2)^3) & \text{dla } s \in [2, 3), \\ 1 & \text{dla } s \geq 3. \end{cases}$$

41.¹ Wyznacz gęstość zmiennej losowej $S = X_1 + X_2 + X_3$, gdzie X_1, X_2, X_3 są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach wykładniczych: $X_1 \sim E(1)$, $X_2 \sim E(2)$, $X_3 \sim E(3)$.

$$\text{Odp.: } f_S(x) = 3e^{-x} - 6e^{-2x} + 3e^{-3x}, \quad x > 0.$$

42. Pokaż, że suma dwóch niezależnych zmiennych losowych o standardowym rozkładzie normalnym $N(0, 1)$ ma rozkład $N(0, 2)$.

$$\text{Wskazówka: } y^2 - by + c = \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c.$$

¹N.L. Bowers, H.U. Gerber, J.C. Hickman, D.A. Jones, C.J. Nesbitt, Actuarial mathematics, 1997.

Funkcje tworzące prawdopodobieństwa, momenty, kumulanty

- 43.** Wyznacz funkcję tworzącą prawdopodobieństwa dla zmiennej losowej X o rozkładzie
1. atomowym skupionym w punktach $1, 2, \dots, n$ z prawdopodobieństwami p_1, p_2, \dots, p_n ,
 2. dwumianowym $X \sim Bin(n, p)$,
 3. Poissona $X \sim Poi(\lambda)$.

- 44.** Korzystając z funkcji tworzącej prawdopodobieństwa, wyznacz rozkład $S = X_1 + X_2$ dla zmiennych losowych X_1, X_2 o rozkładach

i	2	3	5
$P(X_1 = i)$	3/8	3/8	2/8

i	0	1
$P(X_2 = i)$	2/5	3/5

- 45.** Wyznacz funkcję tworzącą momenty dla zmiennej losowej X o rozkładzie

- | | |
|--|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $P(X = a) = 0.5, P(X = b) = 0.5, a \neq b$ 2. dwumianowym $X \sim Bin(n, p)$, 3. Poissona $X \sim Poi(\lambda)$, 4. geometrycznym $X \sim Geo(p)$, 5. jednostajnym $X \sim U(a, b)$, | <p><i> Odp.: $M_X(t) = (1 - p + pe^t)^n$,</i></p> <p><i> Odp.: $M_X(t) = \exp(\lambda(e^t - 1))$, $t \in \mathbb{R}$,</i></p> <p><i> Odp.: $M_X(t) = \frac{pe^t}{1 - qe^t}$,</i></p> <p><i> Odp.: $M_X(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{tb - ta}$,</i></p> |
|--|--|

- 46.** Korzystając z funkcji tworzącej momenty, oblicz $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[X^2]$, $\mathbb{E}[X^3]$, $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$ dla zmiennych losowych z zadania **45**.

- 47.** Korzystając z funkcji tworzącej momenty, wyznacz rozkład $S = X_1 + X_2 + X_3$ dla niezależnych zmiennych losowych X_1, X_2, X_3 o rozkładach wykładniczych $X_1 \sim E(1)$, $X_2 \sim E(2)$, $X_3 \sim E(3)$.

- 48.** Wyznacz kumulanty rozkładu

1. $N(\mu, \sigma^2)$ *Odp.: $c_{1,X} = \mu, c_{2,X} = \sigma^2, c_{k,X} = 0, k > 2$*
2. $Poi(\lambda)$ *Odp.: $c_{k,X} = \lambda, k = 1, 2, \dots$*

- 49.** Za pomocą kumulant oblicz skośność i kurtozę zmiennej losowej

1. $X \sim Poi(\lambda)$,
2. $S = X_1 + X_2 + X_3$, gdy $X_1 \sim Poi(1)$, $X_2 \sim Poi(2)$, $X_3 \sim Poi(3)$, X_1, X_2, X_3 - niezależne.

Odp.: 1. $\frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}$, 2. $\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{1}{6}$

Aproksymacje

50. Ubezpieczyciel posiada w portfelu 100 rocznych ubezpieczeń od kradzieży roweru na terenie pewnego miasta, każde na kwotę 1. Prawdopodobieństwo kradzieży roweru jest równe 0.01. Gdy rower zostanie skradziony, ubezpieczyciel wypłaca świadczenie i ubezpieczenie wygasa.

1. Oblicz prawdopodobieństwo, że łączna wartość szkód przekroczy 4.
2. Oszacuj prawdopodobieństwo, że łączna wartość szkód przekroczy 4, stosując aproksymację:
 - 2.1. rozkładem Poissona,
 - 2.2. rozkładem normalnym,
 - 2.3. rozkładem przesuniętym gamma,
 - 2.4. szeregiem potęgowym standaryzowanej zmiennej normalnej.

Swoje wyniki możesz sprawdzić w R za pomocą kodu

```
x = 3.5; mu = 1; sig = 1; gam = 1; z = (x-mu)/sig
1-pbinom(x, 100, 0.01)
1-ppois(x, 1)
1-pnorm(z)
1-pgamma(x-(mu-2*sig/gam), 4/gam^2, 2/gam/sig)
1-pnorm(sqrt(9/gam^2 + 6*z/gam + 1) - 3/gam)
```

51. Portfel składa się z 50 ryzyk. Prawdopodobieństwo wystąpienia szkody jest równe $\frac{1}{10}$, a wartość szkody B ma gęstość

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{dla } x \in (0, 1), \\ 0, & \text{dla } x \notin (0, 1). \end{cases}$$

Korzystając z aproksymacji rozkładem normalnym, oszacuj prawdopodobieństwo, że łączna wartość szkód przekroczy 7.

Odp.: 0.0244.

52. Portfel składa się z 32 ryzyk. Prawdopodobieństwo wystąpienia szkody jest równe $\frac{1}{6}$, a wartość szkody B ma gęstość

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x), & \text{dla } x \in (0, 1), \\ 0, & \text{dla } x \notin (0, 1). \end{cases}$$

Korzystając z aproksymacji rozkładem normalnym, oszacuj prawdopodobieństwo, że łączna wartość szkód przekroczy 4.

Odp.: 0.0062.

Model ryzyka kolektywnego (łącnego)

53. Niech $S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$. Wyznacz $M_S(t)$, gdy N ma rozkład

1. dwumianowy $\text{Bin}(n, p)$,
2. Poissona $\text{Poi}(\lambda)$.

54. Niech $S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$. Oblicz $\mathbb{E}[S]$, $\text{Var}(S)$, $M_S(t)$, gdy N ma rozkład

1. dwumianowy $\text{Bin}(10, 0.2)$,
2. Poissona $\text{Poi}(4)$.

55. Rozważmy portfel ubezpieczeń, który generuje 0, 1, 2 lub 3 szkody w ustalonym okresie z prawdopodobieństwami odpowiednio 0.1, 0.3, 0.4, 0.2. Wartość pojedynczej szkody wynosi 1, 2 lub 3 z prawdopodobieństwami odpowiednio 0.5, 0.4, 0.1. Oblicz funkcję prawdopodobieństwa i dystrybuantę łącznej wartości szkód generowanych przez ten portfel.

Odp.:

s	$f^{*0}(s)$	$f^{*1}(s)$	$f^{*2}(s)$	$f^{*3}(s)$	$f_S(s)$	$F_S(s)$
0	1				0.1000	0.1000
1		0.5			0.1500	0.2500
2		0.4	0.25		0.2200	0.4700
3		0.1	0.40	0.125	0.2150	0.6850
4			0.26	0.300	0.1640	0.8490
5			0.08	0.315	0.0950	0.9440
6			0.01	0.184	0.0408	0.9848
7				0.063	0.0126	0.9974
8				0.012	0.0024	0.9998
9				0.001	0.0002	1.0000
n	0	1	2	3		
$P(N = n)$	0.1	0.3	0.4	0.2		

56. Oblicz $\mathbb{E}[N]$, $\text{Var}(N)$, $\mathbb{E}[X]$, $\text{Var}(X)$, $\mathbb{E}[S]$, $\text{Var}(S)$ dla portfela z zadania 55.

Odp.: $\mathbb{E}[N] = 1.7$, $\text{Var} N = 0.81$, $\mathbb{E}[X] = 1.6$, $\text{Var}(X) = 0.44$, $\mathbb{E}[S] = 2.72$, $\text{Var}(S) = 2.8216$

57. Niech S ma złożony rozkład Poissona z parametrem $\lambda = 0.8$.

Wartość pojedynczej szkody wynosi 1, 2 lub 3 z prawdopodobieństwami odpowiednio 0.25, 0.375, 0.375.

Za pomocą algorytmu Panjera wyznacz funkcję prawdopodobieństwa zmiennej S dla $s = 0, 1, \dots, 6$. Poniżej kilka pierwszych obliczeń.

Mamy $f_X(1) = 0.25$, $f_X(2) = 0.375$, $f_X(3) = 0.375$. Ponieważ $f_X(0) = 0$, to $f_S(0) = f_N(0) = \frac{e^{-0.8} \cdot 0.8^0}{0!}$.

Dla $s = 1, \dots, 6$ obliczamy według wzoru

$$f_S(s) = \frac{1}{1 - af_X(0)} \sum_{i=1}^s \left(a + b \cdot \frac{i}{s} \right) f_X(i) f_S(s-i) = \sum_{i=1}^s 0.8 \cdot \frac{i}{s} f_X(i) f_S(s-i).$$

Zatem mamy

$$f_S(1) = \sum_{i=1}^1 0.8 \cdot \frac{i}{1} f_X(i) f_S(1-i) = 0.8 f_X(1) f_S(0) = 0.8 \cdot 0.25 \cdot 0.449329,$$

$$f_S(2) = \sum_{i=1}^2 0.8 \cdot \frac{i}{2} f_X(i) f_S(2-i) = 0.8 \cdot \frac{1}{2} f_X(1) f_S(1) + 0.8 f_X(2) f_S(0) = \dots$$

Odp.:

s	0	1	2	3	4	5	6
$f_S(s)$	0.449329	0.089866	0.143785	0.162358	0.049905	0.047360	0.030923

Teoria ruiny (czas dyskretny)

58. Ubezpieczyciel otrzymuje corocznie składkę równą 1 i wypłaca odszkodowanie za i -ty rok w wysokości X_i . Zmienne losowe X_i są niezależne i mają jednakowy rozkład $P(X = 0) = 0.6$, $P(X = 2) = 0.4$. Oblicz współczynnik dopasowania. *Odp.: ln 1.5.*

59. Ubezpieczyciel otrzymuje corocznie składkę równą 2 i wypłaca odszkodowanie za i -ty rok w wysokości X_i . Zmienne losowe X_i są niezależne i mają jednakowy rozkład $P(X = 1) = \frac{6}{7}$, $P(X = 4) = \frac{1}{7}$. Oblicz współczynnik dopasowania. *Odp.: ln 2.*

60. Wyznacz składkę roczną, jeżeli odszkodowanie za i -ty rok jest zmienną losową pochodzącą z rozkładu dwupunktowego: $P(X = 1) = 0.8$, $P(X = 3) = 0.2$, odszkodowania w kolejnych latach są niezależne oraz dany jest współczynnik dopasowania $R = \ln 5$. *Odp.: 2.09.*

61. Załóżmy, że $c = (1 + \theta)E[X]$, gdzie $\theta > 0$ jest narzutem na bezpieczeństwo. Wyznacz θ , jeżeli odszkodowanie za i -ty rok jest zmienną losową o rozkładzie dwupunktowym: $P(X = 1) = 0.5$, $P(X = 2) = 0.5$, odszkodowania w kolejnych latach są niezależne, składki pobierane są corocznie, a współczynnik dopasowania jest równy ln 3. *Odp.: 0.087.*

62. Załóżmy, że łączna wartość szkód w ciągu roku może wynosić 0 lub 5 z prawdopodobieństwem odpowiednio 0.6 i 0.4, odszkodowania płatne są na końcu każdego roku. Początkowa nadwyżka wynosi 3, a roczna składka 3, płatna na początku roku. Pokaż, że stan rezerw wynosi

1. po upływie roku: $U_1 = \begin{cases} 6, & \text{z prawdopodobieństwem } 0.6, \\ 1, & \text{z prawdopodobieństwem } 0.4. \end{cases}$
2. po upływie drugiego roku: $U_2 = \begin{cases} 9, & \text{z prawdopodobieństwem } 0.36, \\ 4, & \text{z prawdopodobieństwem } 0.48, \\ -1, & \text{z prawdopodobieństwem } 0.16. \end{cases}$

Stąd prawdopodobieństwo ruiny w okresie $(0, 1)$ wynosi 0, a w okresie $(0, 2)$ wynosi 0.16.

63. Łączna suma szkód z portfela polis ubezpieczeniowych ma następujący rozkład

$X = x_i$	0	1	2
$P(X = x_i)$	0.8	0.1	0.1

Odszkodowania płatne są na końcu każdego roku, a roczna składka wynosi 1 i jest płatna na początku roku. Korzystając z nierówności Cramera oszacuj prawdopodobieństwo ruiny. Następnie pokaż, że

1. dla $u = 1$ mamy $\psi(1) < 0.125$,
2. dla $u = 2$ mamy $\psi(2) < 0.015625$,
3. dla $u = 3$ mamy $\psi(3) < 0.001953125$.

64. Ubezpieczyciel pobiera coroczne składki równe 1, odszkodowania za i -ty rok w wysokości X_i są zmiennymi losowymi niezależnymi o jednakowym rozkładzie $P(X = 0) = 0.6$, $P(X = 2) = 0.4$, współczynnik dopasowania wynosi ln 1.5. Oblicz prawdopodobieństwo ruiny, gdy nadwyżka początkowa

1. $u = 5$ *Odp.: $(\frac{2}{3})^6$.*
2. $u = 1.5$ *Odp.: $\frac{4}{9}$.*

65. Rozważamy proces nadwyżki z czasem dyskretnym:

$$U_n = u + nc - S_n, \quad S_n = X_1 + \dots + X_n.$$

Założmy, że $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ dla $i = 1, \dots, n$. Wyznacz współczynnik dopasowania.

66. Ubezpieczyciel pobiera corocznie składkę równą ln 64. Odszkodowania za i -ty rok w wysokości X_i są zmiennymi losowymi niezależnymi o jednakowym rozkładzie gamma o wartości oczekiwanej 3 i wariancji 3. Współczynnik dopasowania jest równy a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{2}{3}$.

67. Ubezpieczyciel pobiera corocznie składkę równą 1. Odszkodowania za i -ty rok w wysokości X_i są zmiennymi losowymi niezależnymi o jednakowym rozkładzie dwumianowym $\text{Bin}(2, 0.4)$. Wyznacz współczynnik dopasowania oraz oszacuj prawdopodobieństwo ruiny, jeżeli nadwyżka początkowa jest równa 2.

Odp.: $R = \ln 2.25$, oszacowanie: 0.1975309.

68. Ubezpieczyciel pobiera corocznie składkę równą 2. Odszkodowania za i -ty rok mogą być równe 0, 2 lub 4 z prawdopodobieństwami odpowiednio 0.25, 0.5, 0.25. Oblicz współczynnik dopasowania. Jeżeli nie istnieje, uzasadnij dlaczego.

Teoria ruiny (model klasyczny)

Niech $N = (N_t)_{t \geq 0}$ będzie procesem Poissona, $\lambda > 0$. Wtedy

$$P(N_t = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\mathbb{E}[N_t] = \lambda t, \quad \text{Var } N_t = \lambda t, \quad \text{Cov}(N_t, N_s) = \lambda \min\{t, s\}.$$

69. Niech $\lambda = 2$. Pokaż, że

1. $P(N_5 = 4) = 0.01891664$

3. $\mathbb{E}[2N_3 - 4N_5] = -28$

2. $P(N_5 = 4, N_6 = 9) = 0.0006826903$

4. $\text{Var}(2N_3 - 4N_5) = 88$

Klasycznym procesem ryzyka nazywamy proces

$$Y_t := ct - S_t = ct - \sum_{k=1}^{N_t} X_k,$$

przy czym jeżeli $N_t = 0$, to $S_t = 0$ oraz N_t jest procesem Poissona. Proces nadwyżki ubezpieczyciela dany jest wzorem

$$U_t = u + Y_t.$$

Współczynnikiem dopasowania nazywamy dodatnie rozwiązanie równania

$$\lambda(M_X(r) - 1) = rc. \tag{1}$$

70. Pokaż, że gdy składka dana jest wzorem $c = (1 + \theta) \mathbb{E}[S_1]$, równanie (1) przyjmuje postać

$$M_X(r) = 1 + (1 + \theta)r \mathbb{E}[X],$$

gdzie $\theta > 0$ jest narzutem na bezpieczeństwo.

Oszacowanie współczynnika dopasowania: $R \approx \frac{2(c - \mathbb{E}[X])}{\text{Var } X}$.

Jeżeli przyjmiemy $c = (1 + \theta) \mathbb{E}[X]$, gdzie $\theta > 0$, to oszacowanie to przyjmuje postać $R \approx \frac{2\theta \mathbb{E}[X]}{\text{Var } X}$.

W przypadku, gdy X ma rozkład złożony, otrzymujemy oszacowanie

$$R \approx \frac{2\theta \mathbb{E}[X] \mathbb{E}[N]}{\text{Var } X \mathbb{E}[N] + (\mathbb{E}[X])^2 \text{Var } N}. \tag{2}$$

71. Proces nadwyżki ubezpieczyciela U_t jest złożonym procesem Poissona, gdzie $X \sim \text{Gamma}(3, 2)$. Oblicz współczynnik dopasowania i porównaj z oszacowaniem otrzymanym z (2), gdy

1. $\theta = 0.1$ *Odp.: $R = 0.0923643$; z (2): $R \approx 0.1$.*

2. $\theta = 0.2$ *Odp.: $R = 0.171803$; z (2): $R \approx 0.2$.*

72. Proces nadwyżki ubezpieczyciela U_t jest złożonym procesem Poissona, gdzie $X \sim \text{Geom}(0.6)$, nadwyżka początkowa wynosi 3, a narzut bezpieczeństwa 0.5. Oszacuj prawdopodobieństwo ruiny.

Odp.: Z (2): $R \approx 0.43$. Wtedy $\Psi(3) \approx 0.28$.