1. Spośród wierzchołków graniastosłupa prawidłowego trójkątnego, którego wszystkie krawędzie mają długość 1, wybieramy losowo 3 różne wierzchołki. Obwód otrzymanego trójkąta jest zmienną losową X. Podaj rozkład zmiennej losowej X.

2. Dany jest rozkład zmiennej losowej X

$X = x_i$	-1	1	2	3
$P(X = x_i)$	$1/8$	$1/8$	$1/4$	c

1. Wyznacz wartość stałej c.
2. Oblicz $P(X \in (0, 2])$.
3. Oblicz wartość oczekiwaną zmiennej losowej X.
4. Oblicz wariancję zmiennej losowej X.

3. Sprawdź, czy funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}(1 + x^2), & x \in (0, 1), \\ 0, & x \notin (0, 1). \end{cases}$$

jest gęstością pewnej zmiennej losowej.

4. Dana jest gęstość zmiennej losowej X

$$f(x) = \begin{cases} c(x + 2), & x \in (1, 5), \\ 0, & x \notin (1, 5). \end{cases}$$

1. Wyznacz wartość stałej c.
2. Oblicz i zaznacz na wykresie gęstości $P(X \in (2, 4))$.
3. Wyznacz dystrybuantę F.
4. Oblicz $P(X \in (2, 4))$ za pomocą dystrybuanty.
5. Oblicz wartość oczekiwaną zmiennej losowej X.
6. Oblicz wariancję zmiennej losowej X.

5. Dana jest dystrybuanta zmiennej losowej X

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ \frac{1}{16}(x - 1)^2, & 1 < x \leq 5, \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

1. Oblicz $P(X \in (2, 4))$, korzystając ze wzoru na dystrybuantę.
2. Zaznacz na wykresie dystrybuanty prawdopodobieństwo otrzymane w punkcie 1.
3. Wyznacz gęstość zmiennej losowej X.

6. Oblicz kwantyl rzędu 0.375 zmiennej losowej X o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & x \in (0, 1) \\ 0, & x \notin (0, 1) \end{cases}$$

7. Rozkład łączny pary zmiennych losowych dyskretnych X i Y zadany jest tabelą

X \ Y	-2	0	1
0	0.1	0	0.2
2	0.2	0.2	0.3

1. Wyznacz rozkład brzegowy zmiennej losowej X.
2. Wyznacz rozkład brzegowy zmiennej losowej Y.
3. Sprawdź, czy zmienne losowe X i Y są niezależne.
4. Oblicz kowariancję zmiennych losowych X, Y.

8. Rozkład łączny pary zmiennych losowych dyskretnych X i Y zadany jest tabelą

X \ Y	0	2
-1	0.045	0.055
3	0.405	0.495

1. Sprawdź, czy zmienne losowe X i Y są niezależne.
2. Oblicz kowariancję zmiennych losowych X, Y.

9. Dana jest gęstość wektora losowego (X, Y)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{8}(x^2y + y), & x \in (0,1),\ y \in (0,2), \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

1. Wyznacz rozkład brzegowy zmiennej losowej X.
2. Wyznacz rozkład brzegowy zmiennej losowej Y.
3. Sprawdź, czy zmienne losowe X i Y są niezależne.

10. Czy $\mathcal{F}$ jest σ-ciałem podzbiorów Ω? Odpowiedź uzasadnij.
1. $\Omega = \{1,2,3\}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, \Omega\}$.
2. $\Omega = \{1,2,3\}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \Omega\}$.

11. Czy

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \ldots, \mathbb{N}\}$$

jest σ-ciałem podzbiorów $\mathbb{N}$? Odpowiedź uzasadnij.

12. Czy $\mathcal{F}$ jest σ-ciałem podzbiorów Ω? Odpowiedź uzasadnij.
1. $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, (5,\infty), (-\infty,5), \{5\}, \Omega\}$.
2. $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, (5,\infty), (-\infty,5], \Omega\}$.

13. Niech $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A = \{1,4\}$, $B = \{2\}$. Wyznacz σ-ciało generowane przez zbiory A, B, tzn. $\sigma(A, B)$.

14. Niech $\Omega = \mathbb{R}$. Wyznacz $\sigma((-1,2), (5,6))$.

15. Oblicz i zaznacz na wykresie medianę zmiennej losowej X o dystrybuancie

1. $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{dla } x < 0, \\ 0.1, & \text{dla } x \in [0,1), \\ 0.2, & \text{dla } x \in [1,2), \\ 0.6, & \text{dla } x \in [2,3), \\ 1, & \text{dla } x \geq 3. \end{cases}$

2. $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{dla } x < 0, \\ 0.1, & \text{dla } x \in [0,1), \\ 0.2, & \text{dla } x \in [1,2), \\ 0.5, & \text{dla } x \in [2,3), \\ 1, & \text{dla } x \geq 3. \end{cases}$

16. Zmienne losowe X i Y mają rozkład łączny dany w tabeli

X \ Y	1	2
-2	0	2/6
0	1/6	1/6
3	0	2/6

Wyznacz warunkową wartość oczekiwaną $\mathbb{E}[Y|X]$.

17. Zmienne losowe X i Y mają rozkład łączny dany w tabeli

X \ Y	0	2	4	5
1	0.1	0.1	0.4	0
10	0.2	0	0.1	0.1

Wyznacz warunkowe wartości oczekiwane $\mathbb{E}[X|Y]$, $\mathbb{E}[Y|X]$.

18. Niech $\Omega = [0,1]$, P–miara Lebesgue'a na $[0,1]$.
Wyznacz $\mathbb{E}[f|\mathcal{F}]$, jeżeli $f(x) = \sqrt{x}$, $\mathcal{F}$ jest σ–ciałem generowanym przez zbiory $A_1 = [0, \frac{1}{4})$, $A_2 = [\frac{1}{4}, 1]$.

19. Niech $\Omega = [0,1]$, P–miara Lebesgue'a na $[0,1]$.
Wyznacz $\mathbb{E}[f|\mathcal{F}]$, jeżeli $f(x) = x^2$, $\mathcal{F}$ jest σ–ciałem generowanym przez zbiory $A_1 = [0, \frac{2}{3})$, $A_2 = [\frac{2}{3}, 1]$.

Elementy ekonomiki ubezpieczeń

20. Pokaż, że funkcja $u(x) = -e^{-\alpha x}$ dla ustalonego $\alpha > 0$ spełnia własności funkcji użyteczności.

21. Pokaż, że funkcja $u(x) = x^\gamma$ dla wszystkich $x > 0$ i ustalonego $\gamma \in (0,1)$ spełnia własności funkcji użyteczności.

22. Pokaż, że funkcja $u(x) = x - \alpha x^2$ dla ustalonego $\alpha > 0$ i wszystkich $x < \frac{1}{2\alpha}$ spełnia własności funkcji użyteczności.

23. Decydent posługuje się funkcją użyteczności $u(x) = -e^{-\alpha x}$, gdzie $\alpha > 0$ jest ustalone. Pokaż, że maksymalna cena ubezpieczenia, jaką decydent jest gotów zapłacić za pełne ubezpieczenie straty X, jest równa

$$h = \frac{1}{\alpha} \ln(\mathbb{E}[e^{\alpha X}]).$$

24. Decydenta opisuje funkcja użyteczności $u(x) = -e^{-5x}$. W zamian za swój majątek może on otrzymać losową kwotę X o rozkładzie $N(5,2)$ lub Y o rozkładzie $N(6, 2.5)$. Która kwota będzie preferowana przez decydenta?

Wskazówka: Jeżeli $X \sim N(m, s^2)$, to $\mathbb{E}\left[e^X\right] = e^{m + \frac{s^2}{2}}$.

Odp. $\mathbb{E}[u(X)] = -1$, $\mathbb{E}[u(Y)] \approx -3.5$.

25. Decydenta opisuje funkcja użyteczności $u(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$. W zamian za swój majątek może on otrzymać losową kwotę X lub Y o rozkładach

$X = x_i$	400	900
$P(X = x_i)$	0.5	0.5

$Y = y_i$	100	1600
$P(Y = y_i)$	0.6	0.4

Pokaż, że dla decydenta kwota X jest korzystniejsza od kwoty Y. Wyznacz wartość majątku w, przy której powinien odrzucić ofertę.

Odp. $w < 625$.

26. Decydent posługuje się funkcją użyteczności $u(x) = x - 0.01x^2$, $x < 50$, posiadając majątek $w = 20$. Prawdopodobieństwo poniesienia szkody równej 10 wynosi 0.5, prawdopodobieństwo braku szkody wynosi 0.5. Oblicz maksymalną cenę ubezpieczenia, jaką decydent jest gotów zapłacić za pełne ubezpieczenie straty.

Odp. $h \approx 5.36$.

27. Załóżmy, że strata X jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem $\lambda = 0.1$. Rozważmy proporcjonalny kontrakt ubezpieczeniowy

$$I(x) = \frac{1}{2} x.$$

Znajdź taką wielkość udziału własnego d, aby kontrakt typu stop–loss miał taką samą wartość oczekiwaną, czyli

$$\mathbb{E}[I_d(X)] = \mathbb{E}[I(X)].$$

Odp. $d = 10 \ln 2$.

Model ryzyka indywidualnego

28. Wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej $X = IB$, jeśli prawdopodobieństwo wystąpienia szkody wynosi 0.1, a zmienna losowa wysokości szkody B przyjmuje wartość 5 z prawdopodobieństwem 1.

Odp. $\mathbb{E}\, X = 0.5$, $\mathrm{Var}\, X = 0.25$.

29. Zmienna losowa wysokości szkody B ma rozkład jednostajny na przedziale $[0, 20]$. Prawdopodobieństwo wystąpienia szkody wynosi 0.02.

1. Wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej B.
2. Wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej I.
3. Wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję wysokości wypłaty $X = IB$.

Odp. $\mathbb{E}\, B = 0.5$, $\mathrm{Var}\, B = 0.25$, $\mathbb{E}\, I = 0.05$, $\mathrm{Var}\, I = 0.0475$, $\mathbb{E}\, X = 0.025$, $\mathrm{Var}\, X = 0.024375$.

30. Zmienna losowa wysokości szkody B ma rozkład wykładniczy z parametrem 2. Prawdopodobieństwo wystąpienia szkody wynosi 0.05.

1. Wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej B.
2. Wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej I.
3. Wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję wysokości wypłaty $X = IB$.

31. Portfel zawiera 100 niezależnych ryzyk $X_1, \ldots, X_{100}$, każde generujące co najwyżej jedną szkodę. Ryzyka $X_1, \ldots, X_{80}$ generują szkodę równą 2 z prawdopodobieństwem 0.05, a ryzyka $X_{81}, \ldots, X_{100}$ generują szkodę równą 5 z prawdopodobieństwem 0.01. Wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję łącznej wartości szkód w tym portfelu.

Odp. $\mathbb{E}\, S = 9$, $\mathrm{Var}\, S = 20.15$.

32. Portfel zawiera 50 niezależnych ryzyk $X_1, \ldots, X_{50}$, każde generujące co najwyżej jedną szkodę. Ryzyka $X_1, \ldots, X_5$ generują szkodę równą 1 z prawdopodobieństwem 0.1, ryzyka $X_6, \ldots, X_{40}$ generują szkodę równą 2 z prawdopodobieństwem 0.05, a ryzyka $X_{41}, \ldots, X_{50}$ generują szkodę równą 5 z prawdopodobieństwem 0.05. Wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję łącznej wartości szkód w tym portfelu.

33. Portfel zawiera cztery niezależne ryzyka X_1, X_2, X_3, X_4, każde generujące co najwyżej jedną szkodę. Prawdopodobieństwo wystąpienia szkody to odpowiednio 0.02, 0.03, 0.05, 0.1. Zmienna losowa wysokości szkody B ma rozkład jednostajny na przedziale $[0, 10]$. Wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję łącznej wartości szkód w tym portfelu.

Odp. $\mathbb{E}\, S = 1$, $\mathrm{Var}\, S \approx 6.3217$.

34. Portfel zawiera trzy niezależne ryzyka X_1, X_2, X_3, każde generujące co najwyżej jedną szkodę. Prawdopodobieństwo wystąpienia szkody to odpowiednio 0.01, 0.05, 0.08. Zmienna losowa wysokości szkody B ma rozkład wykładniczy z parametrem 2. Wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję łącznej wartości szkód w tym portfelu.

35. Portfel zawiera trzy niezależne ryzyka X_1, X_2, X_3, każde generujące co najwyżej jedną szkodę. Prawdopodobieństwo wystąpienia szkody to odpowiednio 0.05, 0.1, 0.15. Zmienna losowa wysokości szkody B ma rozkład Poissona z parametrem 3. Wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję łącznej wartości szkód w tym portfelu.

Sploty

36. Dwa niezależne ryzyka mają rozmiary szkód podane w tabeli

i	0	1	2	3	4
$P(X_1 = i)$	2/10	1/10	3/10	1/10	3/10

i	1	3	5
$P(X_2 = i)$	2/5	1/5	2/5

Wyznacz rozkład zmiennej $S = X_1 + X_2$.

37. Trzy niezależne ryzyka mają rozmiary szkód podane w tabeli

i	0	1	2	3
$P(X_1 = i)$	0.3	0.2	0.4	0.1
$P(X_2 = i)$	0.6	0.1	0.3	0
$P(X_3 = i)$	0.4	0.2	0	0.4

Wyznacz rozkład zmiennej $S = X_1 + X_2 + X_3$.

Odp.:

s	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_{S_2}(s)$	0.18	0.15	0.35	0.16	0.13	0.03	–	–	–
$f_S(s)$	0.072	0.096	0.170	0.206	0.144	0.178	0.070	0.052	0.012

38. Wyznacz rozkład zmiennej $S = X_1 + X_2 + X_3$, jeżeli niezależne ryzyka mają rozmiary szkód podane w tabeli.

s	0	1	2	3	4	5
$f_1(s)$	0.4	0.3	0.2	0.1	0	0
$f_2(s)$	0.5	0.2	0.1	0.1	0.1	0
$f_3(s)$	0.6	0	0.1	0.1	0.1	0.1

Odp.:

s	$f_1(s)$	$f_2(s)$	$f_3(s)$	$f^{(2)}(s)$	$f^{(3)}(s)$	$F_1(s)$	$F^{(2)}(s)$	$F^{(3)}(s)$
0	0.4	0.5	0.6	0.20	0.120	0.4	0.20	0.120
1	0.3	0.2	0.0	0.23	0.138	0.7	0.43	0.258
2	0.2	0.1	0.1	0.20	0.140	0.9	0.63	0.398
3	0.1	0.1	0.1	0.16	0.139	1.0	0.79	0.537
4		0.1	0.1	0.11	0.129	1.0	0.90	0.666
5			0.1	0.06	0.115	1.0	0.96	0.781
6				0.03	0.088	1.0	0.99	0.869
7				0.01	0.059	1.0	1.00	0.928
8					0.036	1.0	1.00	0.964
9					0.021	1.0	1.00	0.985
10					0.010	1.0	1.00	0.995
11					0.004	1.0	1.00	0.999
12					0.001	1.0	1.00	1.000

39. Uzupełnij poniższy kod tak, aby uzyskać rozkład zmiennej S z zadania 37.

```
install.packages("SuppDists")
library("SuppDists")
install.packages("kSamples")
library("kSamples")
x1=c(0,1,2,3)
p1=c(0.3,0.2,0.4,0.1)
x2=c(0,1,2,3)
p2=c(0.6,0.1,0.3,0)
conv(x1,p1,x2,p2)
```

Sploty (cd.)

40. Wyznacz dystrybuantę F_S zmiennej losowej $S = X+Y$, gdy dana jest dystrybuanta F_X zmiennej losowej ciągłej X i gęstość f_Y zmiennej losowej ciągłej Y:

1. $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{3}x, & 0 \le x < 3, \\ 1, & x \ge 3 \end{cases}$ $\qquad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4} & 0 < y < 4, \\ 0 & \text{w przec. przyp.} \end{cases} = \frac{1}{4} \cdot \mathbf{1}_{(0,4)}(y).$

2. $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{3}x, & 0 \le x < 3, \\ 1, & x \ge 3 \end{cases}$ $\qquad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 < y < 2, \\ 0 & \text{w przec. przyp.} \end{cases} = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{1}_{(0,2)}(y).$

Odp.: 1. $F_S(s) = \begin{cases} 0 & \text{dla } s < 0, \\ \frac{1}{24}s^2 & \text{dla } s \in [0,3), \\ \frac{1}{4}s - \frac{3}{8} & \text{dla } s \in [3,4), \\ -\frac{1}{24}s^2 + \frac{7}{12}s - \frac{25}{24} & \text{dla } s \in [4,7), \\ 1 & \text{dla } s \ge 7. \end{cases}$

Odp.: 2. $F_S(s) = \begin{cases} 0 & \text{dla } s < 0, \\ \frac{1}{12}s^2 & \text{dla } s \in [0,2), \\ \frac{1}{3}(s-1) & \text{dla } s \in [2,3), \\ -\frac{1}{12}s^2 + \frac{5}{6}s - \frac{13}{12} & \text{dla } s \in [3,5), \\ 1 & \text{dla } s \ge 5. \end{cases}$

41. Wyznacz gęstość sumy niezależnych zmiennych losowych X_1 i X_2 o gęstościach

$$f_1(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{dla } x \ge 0, \\ 0 & \text{dla } x < 0, \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in [0,1], \\ 0 & \text{dla } x \notin [0,1]. \end{cases}$$

Odp.: $f_S(s) = \begin{cases} e^{-2s}(e^{2\min\{s,1\}} - 1) & \text{dla } s \ge 0, \\ 0 & \text{dla } s < 0. \end{cases}$

42.[1] Wyznacz dystrybuantę zmiennej losowej $S = X_1+X_2+X_3$, gdzie X_1, X_2, X_3 są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie o dystrybuancie

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ x & \text{dla } x \in [0,1), \\ 1 & \text{dla } x \ge 1. \end{cases}$$

Odp.: $F_S(s) = \begin{cases} 0 & \text{dla } s < 0, \\ \frac{1}{6}s^3 & \text{dla } s \in [0,1), \\ \frac{1}{6}(s^3 - 3(s-1)^3) & \text{dla } s \in [1,2), \\ \frac{1}{6}(s^3 - 3(s-1)^3 + 3(s-2)^3) & \text{dla } s \in [2,3), \\ 1 & \text{dla } s \ge 3. \end{cases}$

43.[1] Wyznacz gęstość zmiennej losowej $S = X_1 + X_2 + X_3$, gdzie X_1, X_2, X_3 są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach wykładniczych: $X_1 \sim E(1)$, $X_2 \sim E(2)$, $X_3 \sim E(3)$.

Odp.: $f_S(x) = 3e^{-x} - 6e^{-2x} + 3e^{-3x}, \ x > 0.$

44. Pokaż, że suma dwóch niezależnych zmiennych losowych o standardowym rozkładzie normalnym $N(0,1)$ ma rozkład $N(0,2)$.

Wskazówka: $y^2 - by + c = \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c.$

[1] N.L. Bowers, H.U. Gerber, J.C. Hickman, D.A. Jones, C.J. Nesbitt, Actuarial mathematics, 1997.

Funkcje tworzące prawdopodobieństwa, momenty, kumulanty

45. Wyznacz funkcję tworzącą prawdopodobieństwa dla zmiennej losowej X o rozkładzie

1. atomowym skupionym w punktach $1, 2, \ldots, n$ z prawdopodobieństwami $p_1, p_2, \ldots, p_n$,
2. dwumianowym $X \sim Bin(n, p)$,
3. Poissona $X \sim Poi(\lambda)$.

46. Korzystając z funkcji tworzącej prawdopodobieństwa, wyznacz rozkład $S = X_1 + X_2$ dla zmiennych losowych X_1, X_2 o rozkładach

i	2	3	5
$P(X_1 = i)$	3/8	3/8	2/8

i	0	1
$P(X_2 = i)$	2/5	3/5

47. Wyznacz funkcję tworzącą momenty dla zmiennej losowej X o rozkładzie

1. $P(X = a) = 0.5,\ P(X = b) = 0.5,\ a \neq b$
2. dwumianowym $X \sim Bin(n, p)$, *Odp.:* $M_X(t) = (1 - p + pe^t)^n$,
3. Poissona $X \sim Poi(\lambda)$, *Odp.:* $M_X(t) = \exp(\lambda(e^t - 1)), \quad t \in \mathbb{R}$,
4. geometrycznym $X \sim Geo(p)$, *Odp.:* $M_X(t) = \frac{pe^t}{1-qe^t}$,
5. jednostajnym $X \sim U(a, b)$, *Odp.:* $M_X(t) = \frac{e^{tb}-e^{ta}}{tb-ta}$,

48. Korzystając z funkcji tworzącej momenty, oblicz $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[X^2]$, $\mathbb{E}[X^3]$, $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$ dla zmiennych losowych z zadania 47.

49. Korzystając z funkcji tworzącej momenty, wyznacz rozkład $S = X_1 + X_2 + X_3$ dla niezależnych zmiennych losowych X_1, X_2, X_3 o rozkładach wykładniczych $X_1 \sim E(1)$, $X_2 \sim E(2)$, $X_3 \sim E(3)$.

50. Wyznacz kumulanty rozkładu

1. $N(\mu, \sigma^2)$ *Odp.:* $c_{1,X} = \mu,\ c_{2,X} = \sigma^2,\ c_{k,X} = 0,\ k > 2$
2. $Poi(\lambda)$ *Odp.:* $c_{k,X} = \lambda,\ \ k = 1, 2, \ldots$

51. Za pomocą kumulant oblicz skośność i kurtozę zmiennej losowej

1. $X \sim Poi(\lambda)$,
2. $S = X_1 + X_2 + X_3$, gdy $X_1 \sim Poi(1)$, $X_2 \sim Poi(2)$, $X_3 \sim Poi(3)$, X_1, X_2, X_3 - niezależne.

Odp.: 1. $\frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda}$, $\frac{1}{\lambda}$, 2. $\frac{\sqrt{6}}{6}$, $\frac{1}{6}$

Aproksymacje

52. Ubezpieczyciel posiada w portfelu 100 rocznych ubezpieczeń od kradzieży roweru na terenie pewnego miasta, każde na kwotę 1. Prawdopodobieństwo kradzieży roweru jest równe 0.01. Gdy rower zostanie skradziony, ubezpieczyciel wypłaca świadczenie i ubezpieczenie wygasa.

1. Oblicz prawdopodobieństwo, że łączna wartość szkód przekroczy 4.
2. Oszacuj prawdopodobieństwo, że łączna wartość szkód przekroczy 4, stosując aproksymację:
   2.1. rozkładem Poissona,
   2.2. rozkładem normalnym,
   2.3. rozkładem przesuniętym gamma,
   2.4. szeregiem potęgowym standaryzowanej zmiennej normalnej.

Swoje wyniki możesz sprawdzić w R za pomocą kodu

```
x = 3.5;  mu = 1;  sig = 1;  gam = 1;  z = (x-mu)/sig
1-pbinom(x, 100, 0.01)
1-ppois(x,1)
1-pnorm(z)
1-pgamma(x-(mu-2*sig/gam), 4/gam^2, 2/gam/sig)
1-pnorm(sqrt(9/gam^2 + 6*z/gam + 1) - 3/gam)
```

53. Portfel składa się z 50 ryzyk. Prawdopodobieństwo wystąpienia szkody jest równe $\frac{1}{10}$, a wartość szkody B ma gęstość

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{dla } x \in (0,1), \\ 0, & \text{dla } x \notin (0,1). \end{cases}$$

Korzystając z aproksymacji rozkładem normalnym, oszacuj prawdopodobieństwo, że łączna wartość szkód przekroczy 7.

Odp.: 0.0244.

54. Portfel składa się z 32 ryzyk. Prawdopodobieństwo wystąpienia szkody jest równe $\frac{1}{6}$, a wartość szkody B ma gęstość

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x), & \text{dla } x \in (0,1), \\ 0, & \text{dla } x \notin (0,1). \end{cases}$$

Korzystając z aproksymacji rozkładem normalnym, oszacuj prawdopodobieństwo, że łączna wartość szkód przekroczy 4.

Odp.: 0.0062.

Model ryzyka kolektywnego (łącznego)

55. Niech $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$. Wyznacz $M_S(t)$, gdy N ma rozkład

1. dwumianowy $\mathrm{Bin}(n, p)$,
2. Poissona $\mathrm{Poi}(\lambda)$.

56. Niech $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$. Oblicz $\mathbb{E}[S]$, $\mathrm{Var}(S)$, $M_S(t)$, gdy N ma rozkład

1. dwumianowy $\mathrm{Bin}(10, 0.2)$,
2. Poissona $\mathrm{Poi}(4)$.

57. Rozważmy portfel ubezpieczeń, który generuje 0, 1, 2 lub 3 szkody w ustalonym okresie z prawdopodobieństwami odpowiednio 0.1, 0.3, 0.4, 0,2. Wartość pojedynczej szkody wynosi 1, 2 lub 3 z prawdopodobieństwami odpowiednio 0.5, 0.4, 0.1. Oblicz funkcję prawdopodobieństwa i dystrybuantę łącznej wartości szkód generowanych przez ten portfel.

Odp.:

s	$f^{*0}(s)$	$f^{*1}(s)$	$f^{*2}(s)$	$f^{*3}(s)$	$f_S(s)$	$F_S(s)$
0	1				0.1000	0.1000
1		0.5			0.1500	0.2500
2		0.4	0.25		0.2200	0.4700
3		0.1	0.40	0.125	0.2150	0.6850
4			0.26	0.300	0.1640	0.8490
5			0.08	0.315	0.0950	0.9440
6			0.01	0.184	0.0408	0.9848
7				0.063	0.0126	0.9974
8				0.012	0.0024	0.9998
9				0.001	0.0002	1.0000
n	0	1	2	3		
$P(N = n)$	0.1	0.3	0.4	0.2		

58. Oblicz $\mathbb{E}[N]$, $\mathrm{Var}(N)$, $\mathbb{E}[X]$, $\mathrm{Var}(X)$, $\mathbb{E}[S]$, $\mathrm{Var}(S)$ dla portfela z zadania 57.

Odp.: $\mathbb{E}[N] = 1.7$, $\mathrm{Var}\, N = 0.81$, $\mathbb{E}[X] = 1.6$, $\mathrm{Var}(X) = 0.44$, $\mathbb{E}[S] = 2.72$, $\mathrm{Var}(S) = 2.8216$

59. Niech S ma złożony rozkład Poissona z parametrem $\lambda = 0.8$.
Wartość pojedynczej szkody wynosi 1, 2 lub 3 z prawdopodobieństwami odpowiednio 0.25, 0.375, 0.375.
Za pomocą algorytmu Panjera wyznacz funkcję prawdopodobieństwa zmiennej S dla $s = 0, 1, \ldots, 6$. Poniżej kilka pierwszych obliczeń.

Mamy $f_X(1) = 0.25$, $f_X(2) = 0.375$, $f_X(3) = 0.375$. Ponieważ $f_X(0) = 0$, to $f_S(0) = f_N(0) = \dfrac{\mathrm{e}^{-0.8} \cdot 0.8^0}{0!}$.
Dla $s = 1, \ldots, 6$ obliczamy według wzoru

$$f_S(s) = \frac{1}{1 - af_X(0)} \sum_{i=1}^{s} \left(a + b \cdot \frac{i}{s}\right) f_X(i) f_S(s-i) = \sum_{i=1}^{s} 0.8 \cdot \frac{i}{s} f_X(i) f_S(s-i).$$

Zatem mamy

$$f_S(1) = \sum_{i=1}^{1} 0.8 \cdot \frac{i}{1} f_X(i) f_S(1-i) = 0.8 f_X(1) f_S(0) = 0.8 \cdot 0.25 \cdot 0.449329,$$

$$f_S(2) = \sum_{i=1}^{2} 0.8 \cdot \frac{i}{2} f_X(i) f_S(2-i) = 0.8 \cdot \frac{1}{2} f_X(1) f_S(1) + 0.8 f_X(2) f_S(0) = \ldots$$

Odp.:

s	0	1	2	3	4	5	6
$f_S(s)$	0.449329	0.089866	0.143785	0.162358	0.049905	0.047360	0.030923

Teoria ruiny (czas dyskretny)

60. Ubezpieczyciel otrzymuje corocznie składkę równą 1 i wypłaca odszkodowanie za i-ty rok w wysokości X_i. Zmienne losowe X_i są niezależne i mają jednakowy rozkład $P(X = 0) = 0.6,\ P(X = 2) = 0.4$. Oblicz współczynnik dopasowania. *Odp.:* $\ln 1.5$.

61. Ubezpieczyciel otrzymuje corocznie składkę równą 2 i wypłaca odszkodowanie za i-ty rok w wysokości X_i. Zmienne losowe X_i są niezależne i mają jednakowy rozkład $P(X = 1) = \frac{6}{7},\ P(X = 4) = \frac{1}{7}$. Oblicz współczynnik dopasowania. *Odp.:* $\ln 2$.

62. Wyznacz składkę roczną, jeżeli odszkodowanie za i-ty rok jest zmienną losową pochodzącą z rozkładu dwupunktowego: $P(X = 1) = 0.8,\ P(X = 3) = 0.2$, odszkodowania w kolejnych latach są niezależne oraz dany jest współczynnik dopasowania $R = \ln 5$. *Odp.:* 2.09.

63. Załóżmy, że $c = (1 + \theta)\,\mathbb{E}[X]$, gdzie $\theta > 0$ jest narzutem na bezpieczeństwo. Wyznacz θ, jeżeli odszkodowanie za i-ty rok jest zmienną losową o rozkładzie dwupunktowym: $P(X = 1) = 0.5,\ P(X = 2) = 0.5$, odszkodowania w kolejnych latach są niezależne, składki pobierane są corocznie, a współczynnik dopasowania jest równy $\ln 3$. *Odp.:* 0.087.

64. Załóżmy, że łączna wartość szkód w ciągu roku może wynosić 0 lub 5 z prawdopodobieństwem odpowiednio 0.6 i 0.4, odszkodowania płatne są na końcu każdego roku. Początkowa nadwyżka wynosi 3, a roczna składka 3, płatna na początku roku. Pokaż, że stan rezerw wynosi

1. po upływie roku: $U_1 = \begin{cases} 6, & \text{z prawdopodobieństwem } 0.6, \\ 1, & \text{z prawdopodobieństwem } 0.4. \end{cases}$
2. po upływie drugiego roku: $U_2 = \begin{cases} 9, & \text{z prawdopodobieństwem } 0.36, \\ 4, & \text{z prawdopodobieństwem } 0.48, \\ -1, & \text{z prawdopodobieństwem } 0.16. \end{cases}$

Stąd prawdopodobieństwo ruiny w okresie $(0, 1)$ wynosi 0, a w okresie $(0, 2)$ wynosi 0.16.

65. Łączna suma szkód z portfela polis ubezpieczeniowych ma następujący rozkład

$X = x_i$	0	1	2
$P(X = x_i)$	0.8	0.1	0.1

Odszkodowania płatne są na końcu każdego roku, a roczna składka wynosi 1 i jest płatna na początku roku. Korzystając z nierówności Cramera oszacuj prawdopodobieństwo ruiny. Następnie pokaż, że

1. dla $u = 1$ mamy $\psi(1) < 0.125$,
2. dla $u = 2$ mamy $\psi(2) < 0.015625$,
3. dla $u = 3$ mamy $\psi(3) < 0.001953125$.

66. Ubezpieczyciel pobiera coroczne składki równe 1, odszkodowania za i-ty rok w wysokości X_i są zmiennymi losowymi niezależnymi o jednakowym rozkładzie $P(X = 0) = 0.6,\ P(X = 2) = 0.4$, współczynnik dopasowania wynosi $\ln 1.5$. Oblicz prawdopodobieństwo ruiny, gdy nadwyżka początkowa

1. $u = 5$ *Odp.:* $(\frac{2}{3})^6$.
2. $u = 1.5$ *Odp.:* $\frac{4}{9}$.

67. Rozważamy proces nadwyżki z czasem dyskretnym:

$$U_n = u + nc - S_n, \qquad S_n = X_1 + \ldots + X_n.$$

Załóżmy, że $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ dla $i = 1, \ldots, n$. Wyznacz współczynnik dopasowania.

68. Ubezpieczyciel pobiera corocznie składkę równą $\ln 64$. Odszkodowania za i-ty rok w wysokości X_i są zmiennymi losowymi niezależnymi o jednakowym rozkładzie gamma o wartości oczekiwanej 3 i wariancji 3. Współczynnik dopasowania jest równy a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{2}{3}$.

69. Ubezpieczyciel pobiera corocznie składkę równą 1. Odszkodowania za i-ty rok w wysokości X_i są zmiennymi losowymi niezależnymi o jednakowym rozkładzie dwumianowym $\mathrm{Bin}(2, 0.4)$. Wyznacz współczynnik dopasowania oraz oszacuj prawdopodobieństwo ruiny, jeżeli nadwyżka początkowa jest równa 2.
Odp.: $R = \ln 2.25$, oszacowanie: 0.1975309.

70. Ubezpieczyciel pobiera corocznie składkę równą 2. Odszkodowania za i-ty rok mogą być równe 0, 2 lub 4 z prawdopodobieństwami odpowiednio 0.25, 0.5, 0.25. Oblicz współczynnik dopasowania. Jeżeli nie istnieje, uzasadnij dlaczego.

Teoria ruiny (model klasyczny)

Niech $N = (N_t)_{t \geq 0}$ będzie procesem Poissona, $\lambda > 0$. Wtedy

$$P(N_t = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

$\mathbb{E}[N_t] = \lambda t$, $\quad \mathrm{Var}\, N_t = \lambda t$, $\quad Cov(N_t, N_s) = \lambda \min\{t, s\}$.

71. Niech $\lambda = 2$. Pokaż, że

1. $P(N_5 = 4) = 0.01891664$
2. $P(N_5 = 4, N_6 = 9) = 0.0006826903$
3. $\mathbb{E}[2N_3 - 4N_5] = -28$
4. $\mathrm{Var}(2N_3 - 4N_5) = 88$

Klasycznym procesem ryzyka nazywamy proces

$$Y_t := ct - S_t = ct - \sum_{k=1}^{N_t} X_k,$$

przy czym jeżeli $N_t = 0$, to $S_t = 0$ oraz N_t jest procesem Poissona. Proces nadwyżki ubezpieczyciela dany jest wzorem

$$U_t = u + Y_t.$$

Współczynnikiem dopasowania nazywamy dodatnie rozwiązanie równania

$$\lambda(M_X(r) - 1) = rc. \tag{1}$$

72. Pokaż, że gdy składka dana jest wzorem $c = (1 + \theta)\, \mathbb{E}[S_1]$, równanie (1) przyjmuje postać

$$M_X(r) = 1 + (1 + \theta) r\, \mathbb{E}[X],$$

gdzie $\theta > 0$ jest narzutem na bezpieczeństwo.

Oszacowanie współczynnika dopasowania: $\quad R \approx \dfrac{2(c - \mathbb{E}[X])}{\mathrm{Var}\, X}$.

Jeżeli przyjmiemy $c = (1 + \theta)\, \mathbb{E}[X]$, gdzie $\theta > 0$, to oszacowanie to przyjmuje postać $\quad R \approx \dfrac{2\theta\, \mathbb{E}[X]}{\mathrm{Var}\, X}$.

W przypadku, gdy X ma rozkład złożony, otrzymujemy oszacowanie

$$R \approx \frac{2\theta\, \mathbb{E}[X]\, \mathbb{E}[N]}{\mathrm{Var}\, X\, \mathbb{E}[N] + (\mathbb{E}[X])^2\, \mathrm{Var}\, N}. \tag{2}$$

73. Proces nadwyżki ubezpieczyciela U_t jest złożonym procesem Poissona, gdzie $X \sim \mathrm{Gamma}(3, 2)$. Oblicz współczynnik dopasowania i porównaj z oszacowaniem otrzymanym z (2), gdy

1. $\theta = 0.1$ *Odp.:* $R = 0.0923643$; z (2): $R \approx 0.1$.
2. $\theta = 0.2$ *Odp.:* $R = 0.171803$; z (2): $R \approx 0.2$.

74. Proces nadwyżki ubezpieczyciela U_t jest złożonym procesem Poissona, gdzie $X \sim \mathrm{Geom}(0.6)$, nadwyżka początkowa wynosi 3, a narzut bezpieczeństwa 0.5. Oszacuj prawdopodobieństwo ruiny.
Odp.: Z (2): $R \approx 0.43$. Wtedy $\Psi(3) \approx 0.28$.