Analiza matematyczna

Dla ciągu (a_n) definiuje się $S_k = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n$. Wtedy $\lim\limits_{k\to\infty} S_k = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywa się szeregiem o wyrazach (a_n).

Wartość $\lim\limits_{k\to\infty} S_k$ nazywa się sumą szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

77. Wyznacz sumę szeregu

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ dla $|q|<1$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n}$
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{5^n}$
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n-2^n}{5^n}$
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n-2^n}{6^n}$
9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$
10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+1)(n+2)}$
11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n$
12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1-2n)$

78. Zamień na ułamek zwykły liczbę

1. $a = 11,0(7)$
2. $b = 0,(12)$
3. $c = 3,10(1)$
4. $d = 1,(002)$

79. Wiedząc, że jeśli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim\limits_{k\to\infty} a_n = 0$, pokaż, że nie jest zbieżny szereg

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n-1}$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+2n^2}{n^2+2n}$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^n$

80. Korzystając z kryterium porównawczego uzasadnij, że szereg jest zbieżny

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+2n^2+1}$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^3}$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^5-n^3}{n^9+1}$
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^6+6}$
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{n^5+n^3+n}$
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-n}{n^5}$
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^5-1}{n^9+1}$

81. Korzystając z kryterium porównawczego uzasadnij, że szereg jest rozbieżny

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2}$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^5+n^3}{2n^6-1}$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2-n}{n^3+1}$

82. Korzystając z kryterium d'Alamberta uzasadnij zbieżność lub rozbieżność szeregu

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}$
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(0,9)^n}{n}$
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{2^n}$
9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n}{n!}$
10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{9^n}$

83. Korzystając z kryterium Cauchy'ego uzasadnij zbieżność lub rozbieżność szeregu

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{2^n}$

84. Pokaż, że szereg jest bezwzględnie lub warunkowo zbieżny

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n^2-1}$