## Analiza matematyczna

Szereg, w którym wyrazy są funkcjami zmiennej $x$, tzn. szereg postaci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ nazywamy szeregiem funkcyjnym. Szereg funkcyjny postaci

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

nazywamy szeregiem potęgowym.

**85.** Oblicz promień zbieżności szeregu i zbadaj jego zbieżność na krańcach przedziału zbieżności.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^n$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 5^n}$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n+1} x^n$
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n \cdot 4^{n+1}} x^n$
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n} x^n$
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^n} x^n$
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{10^n} x^n$
9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! x^n$
10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} x^n$
11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$
12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$

**86.** Rozwiń w szereg Taylora

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n)!}(x-x_0)^n + \ldots \end{aligned}$$

funkcję

1. $f(x) = 10x^5 + 7x^4 - 12x^3 + x^2 - 3x + 5, \ x_0 = 1$
2. $f(x) = \frac{1}{x}, \ x_0 = 3$
3. $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right), \ x_0 = 2$
4. $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{a}}, \ x_0 = a$

**87.** Rozwiń w szereg Maclaurina funkcję

1. $f(x) = \mathrm{e}^x$
2. $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$
3. $f(x) = \cos x$
4. $f(x) = \sin x$
5. $f(x) = \sin x \cos x$
6. $f(x) = \frac{1 - x + x^2}{1 + x + x^2}$