

Analiza matematyczna

31. Oblicz, doprowadź do najprostszej postaci

1. $\binom{7}{3} - \binom{5}{2}$

3. $\binom{n}{2} + \binom{n}{n-2}$

5. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$

2. $\binom{13}{6} : \binom{12}{5}$

4. $\binom{n+2}{3} : \binom{n+1}{2}$

6. $\binom{n+1}{k} - \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right]$

32. Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona, zapisz w postaci sumy wielomianu i funkcji wymiernej

1. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^8$

2. $\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^5$

3. $\left(\frac{2}{x^2} - \frac{x}{2}\right)^4$

4. $\left(-x + \frac{1}{x}\right)^6$

33. Wyznacz wyraz rozwinięcia

1. $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^3}\right)^{20}$, który nie zależy od x

2. $\left(\sqrt[3]{5} - \sqrt[5]{3}\right)^{14}$, który jest wymierny

34. Metodą indukcji matematycznej wykaż, że dla każdej liczby naturalnej dodatniej n (lub spełniającej dany warunek), zachodzi

1. liczba $7^n - 1$ dzieli się przez 3

5. $1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 - \frac{1}{2^n}$

2. liczba $n^3 + 17n$ dzieli się przez 6

6. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

3. $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

7. $2^n > n$ dla $n \geq 2$

4. $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$

8. $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$

35. Wyznacz wzór na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) , mając dane

1. $a_1 = -1, r = 5$

5. $a_7 = -3, a_{21} = 4$

2. $a_1 = 3, r = -2$

6. $a_3 = 0, a_{10} = -7$

3. $a_2 = 8, a_3 = 18$

7. $a_2 + a_5 = 7, a_3 + a_8 = 11$

4. $a_6 = 2, a_{13} = 15$

8. $a_6 - a_4 = 1, a_5 + a_{13} = 16$

36. Wyznacz wzór na n -ty wyraz ciągu geometrycznego (a_n) , mając dane

1. $a_1 = \frac{1}{3}, q = -3$

4. $a_4 = 2, a_8 = 32$

2. $a_1 = -4, q = \frac{1}{2}$

5. $a_2 = 1, a_5 = -\frac{1}{8}$

3. $a_2 = 6, a_3 = 18$

6. $a_3 = 9, a_5 = 81$

37. Sprawdź, że składniki danych sum tworzą ciąg arytmetyczny lub geometryczny i oblicz te sumy

1. $2 + 4 + 8 + \dots + 2^{20}$

4. $3 + 5 + 7 + \dots + 15$

2. $2 + 4 + 6 + \dots + 52$

5. $1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1), k \geq 1$

3. $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \dots - \frac{1}{3^8}$

6. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^k}, k \geq 1$