LISTA nr 3

Zadanie 1. Wykaż, że funkcja $u : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{N} c_n e^{-n^2\pi^2 t} \sin n\pi x$$

spełnia równanie przewodnictwa ciepła

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x)$$

oraz warunki:

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{N} c_n \sin n\pi x, \quad u(t,0) = u(t,1) = 0.$$

Zadanie 2. Wykaż, że funkcja $u : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} v(y)dy$$

spełnia równanie przewodnictwa ciepła

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x), \quad u(0,x) = v(x).$$

Zadanie 3. Napisz schemat różnicowy dla równania przewodnictwa ciepła

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(t,x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x) &= g(t,x), \quad (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) &= v(x). \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Wybierz kroki siatki Δt i Δx, takie że

$$1 = 2\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

oraz przyjmij

$$g \equiv 0.$$

Wykaż, że w tym przypadku schemat ma rozwiązanie

$$u^{i,j} = \sum_{k=0}^{i} \frac{1}{2^i} \binom{i}{k} v^{i+j-2k}.$$