LISTA nr 4

Zadanie 1. Sprawdź, czy $\mathcal{F}$ jest σ-ciałem podzbiorów Ω.

1. $\Omega = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \Omega\}$.
2. $\Omega = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \Omega\}$.
3. $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}, \dots, \Omega\}$.
4. $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, (5, \infty), (-\infty, 5), \{5\}, \Omega\}$.
5. $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, (5, \infty), (-\infty, 5], \Omega\}$.

Zadanie 2. Niech $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 4\}$, $B = \{2\}$. Wyznacz $\sigma(A, B)$.

Zadanie 3. Niech $\Omega = \mathbb{R}$. Wyznacz $\sigma((-1, 2), (5, 6))$.

Zadanie 4. Niech B_t i W_t będą niezależnymi ruchami Browna. Pokaż, że

$$X_t = \frac{1}{\sqrt{2}} (B_t + W_t)$$

jest również ruchem Browna.

Zadanie 5. Pokaż, że proces $2W_t - W_s$ zależy od przeszłości.

Zadanie 6. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi,

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), \qquad Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2).$$

Pokaż, że wektor losowy $(X, X + Y)$ ma rozkład normalny o średniej $m = (\mu_1, \mu_1 + \mu_2)$ i macierzy kowariancji

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1^2 \\ \sigma_1^2 & \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 7. Wyznacz rozkład wektora losowego (W_t, W_s), $0 < t < s$. Skorzystaj z poprzedniego zadania.

Zadanie 8. Dla podanych procesów stochastycznych oblicz funkcje wartości oczekiwanej $m_X(t)$ i kowariancji $c_X(t, s)$.

1. $X_t = \mu t + \sigma W_t, \quad t \geq 0$
2. $X_t = \frac{W_{t+h} - W_t}{h}, \quad t \geq 0$
3. $X_t = W_t - tW_1, \quad t \in [0, 1]$
4. $X_t = e^{\mu t + \sigma W_t}, \quad t \geq 0$

Zadanie 9. Wykaż, że jeśli Z jest zmienną losową o rozkładzie $N(0, 1)$, to $E\left[e^{\lambda Z}\right] = e^{\frac{\lambda^2}{2}}$ dla $\lambda \in \mathbb{R}$.