

LISTA nr 5

Zadanie 1. Niech

$$X_t = \begin{cases} -1 & \text{dla } 0 \leq t \leq 1, \\ 1 & \text{dla } 1 < t \leq 2, \\ 2 & \text{dla } 2 < t \leq 3. \end{cases}$$

Korzystając z definicji całki Itô dla procesów prostych, oblicz

$$\int_0^3 X_t dW_t.$$

Zadanie 2. Pokaż, że całka Itô nie ma własności monotoniczności.

Zadanie 3. Stosując Lemat Itô, oblicz różniczkę stochastyczną procesów:

- | | | |
|-----------------------------|------------------------|--------------------------------|
| 1. $Y_t = W_t^2$ | 4. $Y_t = \cos(W_t)$ | 6. $Y_t = \frac{1}{1+W_t^2}$ |
| 2. $Y_t = \frac{1}{3}W_t^3$ | | |
| 3. $Y_t = \exp(W_t)$ | 5. $Y_t = \arctg(W_t)$ | 7. $Y_t = \frac{W_t}{1+W_t^2}$ |

Zadanie 4. Zastosuj Lemat Itô do funkcji:

- | | |
|------------------------------------|---|
| 1. $f(t, W_t) = 2 + t + \exp(W_t)$ | 4. $f(t, W_t) = \exp(W_t - \frac{1}{2}t)$ |
| 2. $f(t, W_t) = W_t^2 - t$ | |
| 3. $f(t, W_t) = tW_t$ | 5. $f(t, W_t) = \exp(\frac{1}{2}t) \sin(W_t)$ |

Zadanie 5. Zastosuj Lemat Itô do funkcji:

- $f(t, X_t) = X_t^2 - t, \quad X_t = 5t + W_t$
- $f(t, X_t) = tX_t^2, \quad X_t = \int_0^t s dW_s$

Zadanie 6. Niech $X_t = 1 - t$ oraz $Y_t = \int_0^t \frac{1}{1-s} dW_s$. Oblicz $d(X_t Y_t)$.

Zadanie 7. Oblicz $\mathbb{E}[(W_t^2 - t)^2]$.

Wskazówka:

$$\int_0^\infty t^{p-1} e^{-t} dt = \Gamma(p), \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$