LISTA nr 6

Zadanie 1. Niech $Y_1, Y_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowych rozkładach (iid), $m_Y := \mathbb{E}[Y_1]$, $\sigma_Y^2 := Var(Y_1) > 0$ oraz

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

Rozważmy proces stochastyczny S_t^n określony wzorem

$$S_t^n := \frac{R_i - i m_Y}{\sigma_Y \sqrt{n}} \quad \text{dla } t = \frac{i}{n},\ i = 0, \ldots, n$$

oraz za pomocą liniowej interpolacji między węzłami. Sprawdź następujące własności:

1. S^n startuje z zera: $S_0^n = 0$,
2. S^n ma niezależne przyrosty

$$S_{t_{i_2}}^n - S_{t_{i_1}}^n, \ldots, S_{t_{i_r}}^n - S_{t_{i_{r-1}}}^n \quad \text{dla} \quad 0 \le t_{i_1} < \ldots < t_{i_r} \le 1$$

3. $S_{i/n}^n \sim N(0, i/n)$ dla $i = 1, \ldots, n$.

Zadanie 2. Wykonano n niezależnych rzutów monetą. Przeanalizuj poprzednie zadanie, przyjmując:

$$Y_k = \begin{cases} 1, & \text{jeśli w } k\text{-tym rzucie wypadł orzeł,} \\ 0, & \text{jeśli w } k\text{-tym rzucie wypadła reszka.} \end{cases}$$

Zadanie 3. Niech

$$X_t = X_0 + c\int_0^t X_s ds + \sigma \int_0^t X_s dW_s.$$

Wykaż, że jeżeli c, σ, X_0 są stałymi dodatnimi, to $X_t > 0$.

Zadanie 4. Schemat Eulera dla równania z zadania 3 jest postaci:

$$Y_0 = X_0, \qquad Y_{i+1} = Y_i(1 + ch + \sigma \Delta W_i),$$

$$Y_i = Y_{t_i}, \quad \Delta W_i = W_{t_i+h} - W_{t_i}, \quad t_i = hi, \quad h > 0.$$

Przy założeniu, że c, σ, X_0 są stałymi dodatnimi, oblicz $P(Y_i < 0)$ dla $i = 1, 2$.

Zadanie 5. W jaki sposób przeprowadzać symulacje w oparciu o metodę Eulera? Wykonaj takie symulacje z wykorzystaniem monety orzeł-reszka.