

LISTA nr 7

Zadanie 1. Wykaż, że

$$1. \mathbb{E}[Y_i] = X_0(1 + ch)^i \rightarrow X_0 e^{t_i c}$$

$$2. \mathbb{E}[Y_i^2] = X_0^2 ((1 + ch)^2 + \sigma^2 h)^i \rightarrow X_0^2 e^{t_i(2c + \sigma^2)}$$

Wyznacz $\mathbb{E}[Y_i^3]$.

Zadanie 2. Zmodyfikowana metoda Eulera (dla równania z zadania 3, lista nr 6) jest postaci:

$$Y_0 = X_0, \quad Y_{i+1} = Y_i \exp((c - \sigma^2/2)h + \sigma \Delta W_i).$$

W jaki sposób przeprowadza się symulacje w oparciu o tę metodę?

Zadanie 3. Pokaż, że procesy

$$X_t = X_0 + \int_0^t g(s, X_s) dW_s \quad \text{oraz} \quad Y_{i+1} = Y_i + g(t_i, Y_i) \Delta W_i$$

są martyngałami.

Zadanie 4. Oblicz momenty procesów

$$M_t = X_t e^{-ct} \quad \text{oraz} \quad N_{i+1} = N_i + \sigma N_i \Delta W_i.$$

Zadanie 5. Oblicz pierwszy i drugi moment procesu Y_i z zadania 2.

Zadanie 6. Schemat Eulera dla równania

$$dX_t = cX_t dt + \sigma dW_t$$

jest postaci

$$N_0 = X_0, \quad N_{i+1} = N_i + \sigma e^{-ct_i} \Delta W_i.$$

Oblicz pierwszy i drugi moment procesu N_i .