

LISTA nr 8

Zadanie 1. Wykaż, że jeżeli spełnione są warunki CFL oraz $r \geq 0$, $\sigma > 0$, to rozwiązanie schematu dla równania Blacka-Scholesa:

$$\begin{aligned} v^{(i+1,j)} &= v^{(i,j)} \left[1 - \sigma^2 \frac{\Delta t}{(\Delta z)^2} - r \Delta t \right] \\ &+ v^{(i,j+1)} \left[\frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\Delta t}{(\Delta z)^2} + \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \frac{\Delta t}{\Delta z} \right] \\ &+ v^{(i,j-1)} \left[\frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\Delta t}{(\Delta z)^2} - \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \frac{\Delta t}{\Delta z} \right] \\ v^{(0,j)} &= (e^{j\Delta z} - K)^+, \quad j \in Z. \end{aligned}$$

jest nieujemne.

Zadanie 2. (Lemat 2, wykład str. 47) Oblicz C :

$$\frac{1}{2} \sigma^2 \frac{e^{\Delta z} - 2 + e^{-\Delta z}}{(\Delta z)^2} + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \frac{e^{\Delta z} - e^{-\Delta z}}{2\Delta z} - r \leq C(\Delta z)^2.$$

Zadanie 3. (Schemat Milsteina) Oblicz

$$\mathbb{E} \left[\left(1 + hc + \sigma \Delta W_i + \frac{1}{2} \sigma^2 ((\Delta W_i)^2 - h) \right)^2 \right].$$

Metoda najszybszego spadku

Zadanie 4. Metoda iteracyjna dana jest wzorem:

$$x^{k+1} = x^k + t_k v^k, \quad v^k = -\frac{\nabla f(x^k)}{\|\nabla f(x^k)\|}, \quad \langle \nabla f(x^k), v^k \rangle + t_k \langle v^k, H(x^k) v^k \rangle = 0,$$

gdzie $H(x^k)$ - macierz drugich pochodnych gładkiej funkcji wypukłej $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Sprawdź wzór na t_k oraz bezpośredni wzór na x^{k+1} (wykład, str. 54).

Zadanie 5. Niech

$$f(x) = a - \langle b, x \rangle + \frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle,$$

gdzie A - kwadratowa macierz symetryczna, dodatnio określona. Wykaż, że

$$\nabla f(x) = -b + Ax.$$

Zadanie 6. Wyprowadź równanie dla r^{k+1} :

$$r^{k+1} = r^k - \frac{\|r^k\|^2}{\langle r^k, Ar^k \rangle} Ar^k, \quad r^k = -b + Ax^k.$$

Zadanie 7. Pokaż, że wektory v^k i v^{k+1} są ortogonalne.

Zadanie 8. Pokaż, że

$$f(x^{k+1}) = f(x^k) - \frac{1}{2} \frac{\|r^k\|^4}{\langle r^k, Ar^k \rangle}.$$

Zadanie 9. Wykonaj dwa kroki metody najszybszego spadku dla następujących danych:

$$a = 3, \quad b = (-1, -1), \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad x^0 = (0, 0).$$