Zadanie 1. Oblicz pięć pierwszych wielomianów Hermite'a, korzystając z definicji:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

Zadanie 2. Sprawdź, że dla wielomianów z zadania 1 zachodzi reguła trójczłonowa:

$$\begin{aligned}
&H_0(x) = 1,\\
&H_1(x) = 2x,\\
&H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), \quad n \geq 1.
\end{aligned}$$

Zadanie 3. Korzystając z funkcji tworzącej dla wielomianów Hermite'a:

$$g(t,x) = e^{-t^2+2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!},$$

wykaż

1. $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$
2. $H_n^{'}(x) = 2nH_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$
3. $H_n^{''}(x) - 2xH_n^{'}(x) + 2nH_n(x) = 0,$ (równanie Hermite'a)
4. $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x),$
5. $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2},$

Wskazówka do 3.5:

Wyznacz $\frac{\partial^n g}{\partial t^n}|_{t=0}$, i zauważ, że $\frac{\partial}{\partial t} e^{-(t-x)^2} = -\frac{\partial}{\partial x} e^{-(t-x)^2}$.