Zadanie 1. Sprawdź, czy $\mathcal{F}$ jest σ-ciałem podzbiorów Ω.

1. $\Omega = \{1,2,3\}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, \Omega\}$.
2. $\Omega = \{1,2,3\}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \Omega\}$.
3. $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \ldots, \Omega\}$.
4. $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, (5,\infty), (-\infty,5), \{5\}, \Omega\}$.
5. $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, (5,\infty), (-\infty,5], \Omega\}$.

Zadanie 2. Niech $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A = \{1,4\}$, $B = \{2\}$. Wyznacz $\sigma(A,B)$.

Zadanie 3. Niech $\Omega = \mathbb{R}$. Wyznacz $\sigma((-1,2),(5,6))$.

Zadanie 4. Niech B_t i W_t będą niezależnymi ruchami Browna. Pokaż, że

$$X_t = \frac{1}{\sqrt{2}}(B_t + W_t)$$

jest również ruchem Browna.

Zadanie 5. Pokaż, że proces $2W_t - W_s$ zależy od przeszłości.

Zadanie 6. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi,

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), \qquad Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2).$$

Pokaż, że wektor losowy $(X, X+Y)$ ma rozkład normalny o średniej $m = (\mu_1, \mu_1 + \mu_2)$ i macierzy kowariancji

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1^2 \\ \sigma_1^2 & \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 7. Wyznacz rozkład wektora losowego (W_t, W_s), $0 < t < s$. Skorzystaj z poprzedniego zadania.

Zadanie 8. Dla podanych procesów stochastycznych oblicz funkcje wartości oczekiwanej $m_X(t)$ i kowariancji $c_X(t,s)$.

1. $X_t = \mu t + \sigma W_t, \quad t \geq 0$
2. $X_t = \frac{W_{t+h} - W_t}{h}, \quad t \geq 0$
3. $X_t = W_t - tW_1, \quad t \in [0,1]$
4. $X_t = e^{\mu t + \sigma W_t}, \quad t \geq 0$

Zadanie 9. Wykaż, że jeśli Z jest zmienną losową o rozkładzie $N(0,1)$, to $E\left[e^{\lambda Z}\right] = e^{\frac{\lambda^2}{2}}$ dla $\lambda \in \mathbb{R}$.