Zadanie 1. Niech $Y_1, Y_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowych rozkładach (iid), $m_Y := \mathbb{E}[Y_1]$, $\sigma_Y^2 := Var(Y_1) > 0$ oraz

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

Rozważmy proces stochastyczny S_t^n określony wzorem

$$S_t^n := \frac{R_i - im_Y}{\sigma_Y \sqrt{n}} \quad \text{dla } t = \frac{i}{n},\ i = 0, \ldots, n$$

oraz za pomocą liniowej interpolacji między węzłami. Sprawdź następujące własności:

1. S^n startuje z zera: $S_0^n = 0$,
2. S^n ma niezależne przyrosty

$$S_{t_{i_2}}^n - S_{t_{i_1}}^n, \ldots, S_{t_{i_r}}^n - S_{t_{i_{r-1}}}^n \quad \text{dla} \quad 0 \le t_{i_1} < \ldots < t_{i_r} \le 1$$

3. $S_{i/n}^n \sim N(0, i/n)$ dla $i = 1, \ldots, n$.

Zadanie 2. Wykonano n niezależnych rzutów monetą. Przeanalizuj poprzednie zadanie, przyjmując:

$$Y_k = \begin{cases} 1, & \text{jeśli w k-tym rzucie wypadł orzeł,} \\ 0, & \text{jeśli w k-tym rzucie wypadła reszka.} \end{cases}$$

Zadanie 3. Niech X będzie zmienną losową, oznaczającą liczbę orłów otrzymaną przy dwukrotnym rzucie monetą, A - zdarzeniem polegającym na wypadnięciu orła w pierwszym rzucie. Wyznacz $\mathbb{E}[X|\sigma(A)]$.

Zadanie 4. Doświadczenie polega na jednokrotnym rzucie kostką. Zmienna losowa X przyjmuje wartość 0, gdy wypadła liczba parzysta i 1, gdy nieparzysta. Zmienna losowa Y przyjmuje wartość równą liczbie wypadniętych oczek. Wyznacz $\mathbb{E}[X|Y]$ oraz $\mathbb{E}[Y|X]$.

Zadanie 5. Wektor losowy (X, Y) ma rozkład:

Y \ X	0	2	3
-2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{8}$

Wyznacz:

1. $\mathbb{E}[X|\sigma(Y)]$
2. $\mathbb{E}[Y|\sigma(X)]$

Zadanie 6. Niech $\Omega = [0, 1]$, P-miara Lebesgue'a na $[0, 1]$. Wyznacz $\mathbb{E}[g|\mathcal{F}]$, jeżeli

1. $g(x) = \sqrt{x}$, $\mathcal{F}$ jest σ-ciałem generowanym przez zbiory $[0, \frac{1}{4}), [\frac{1}{4}, 1]$.
2. $g(x) = -x$, $\mathcal{F}$ jest σ-ciałem generowanym przez zbiory $[0, \frac{1}{2}), [\frac{1}{3}, 1]$.