

**Zadanie 1.** Stosując Lemat Itô, oblicz różniczkę stochastyczną procesów:

1.  $Y_t = W_t^2$
2.  $Y_t = \frac{1}{3}W_t^3$
3.  $Y_t = \exp(W_t)$
4.  $Y_t = \cos(W_t)$
5.  $Y_t = \arctg(W_t)$
6.  $Y_t = \frac{1}{1+W_t^2}$
7.  $Y_t = \frac{W_t}{1+W_t^2}$

**Zadanie 2.** Zastosuj Lemat Itô do funkcji:

1.  $f(t, W_t) = 2 + t + \exp(W_t)$
2.  $f(t, W_t) = W_t^2 - t$
3.  $f(t, W_t) = tW_t$
4.  $f(t, W_t) = \exp(W_t - \frac{1}{2}t)$
5.  $f(t, W_t) = \exp(\frac{1}{2}t) \sin(W_t)$

**Zadanie 3.** Zastosuj Lemat Itô do funkcji:

1.  $f(t, X_t) = X_t^2 - t, \quad X_t = 5t + W_t$
2.  $f(t, X_t) = tX_t^2, \quad X_t = \int_0^t s dW_s$

**Zadanie 4.** Niech  $X_t = 1 - t$  oraz  $Y_t = \int_0^t \frac{1}{1-s} dW_s$ . Oblicz  $d(X_t Y_t)$ .

**Zadanie 5.** Niech

$$X_t = \begin{cases} -1 & \text{dla } 0 \leq t \leq 1, \\ 1 & \text{dla } 1 < t \leq 2, \\ 2 & \text{dla } 2 < t \leq 3. \end{cases}$$

Korzystając z definicji całki Itô dla procesów prostych, oblicz

$$\int_0^3 X_t dW_t.$$

**Zadanie 6.** Oblicz  $\mathbb{E}[(W_t^2 - t)^2]$ .

*Wskazówka:*

$$\int_0^\infty t^{p-1} e^{-t} dt = \Gamma(p), \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$