Zadanie 1. Niech

$$X_t = X_0 + c\int_0^t X_s ds + \sigma \int_0^t X_s dW_s.$$

Wykaż, że jeżeli c, σ, X_0 są stałymi dodatnimi, to $X_t > 0$.

Zadanie 2. Schemat Eulera dla równania z zadania 1 jest postaci:

$$Y_0 = X_0, \qquad Y_{i+1} = Y_i(1 + ch + \sigma\Delta W_i),$$

$$Y_i = Y_{t_i}, \quad \Delta W_i = W_{t_i+h} - W_{t_i}, \quad t_i = hi, \quad h > 0.$$

Przy założeniu, że c, σ, X_0 są stałymi dodatnimi, oblicz $P(Y_i < 0)$ dla $i = 1, 2$.

Zadanie 3. W jaki sposób przeprowadzać symulacje w oparciu o metodę Eulera? Wykonaj takie symulacje z wykorzystaniem monety orzeł-reszka.

Zadanie 4. Pokaż, że oszacowanie wynikające z poniższej rekurencji jest zbyt duże.

$$\mathbb{E}[\epsilon_{i+1}^2] \;\leq\; \mathbb{E}[\epsilon_i^2]\left((1+ch)^2 + \sigma^2 h\right) + \sqrt{\mathbb{E}[\epsilon_i^2]}hC_T + c^2K_Th^3 + \sigma^2K_Th^2.$$

Zadanie 5. Wykaż, że

1. $\mathbb{E}[Y_i] = X_0(1+ch)^i \;\to\; X_0e^{t_ic}$
2. $\mathbb{E}[Y_i^2] = X_0^2\left((1+ch)^2 + \sigma^2 h\right)^i \;\to\; X_0^2e^{t_i(2c+\sigma^2)}$

Wyznacz $\mathbb{E}[Y_i^3]$.

Zadanie 6. Zmodyfikowana metoda Eulera dla równania z zadania 1 jest postaci:

$$Y_0 = X_0, \qquad Y_{i+1} = Y_i \exp\left((c - \sigma^2/2)h + \sigma\Delta W_i)\right).$$

W jaki sposób przeprowadza się symulacje w oparciu o tę metodę?

Zadanie 7. Pokaż, że procesy

$$X_t = X_0 + \int_0^t g(s, X_s)dW_s \quad \text{oraz} \quad Y_{i+1} = Y_i + g(t_i, Y_i)\Delta W_i$$

są martyngałami.

Zadanie 8. Oblicz momenty procesów

$$M_t = X_te^{-ct} \quad \text{oraz} \quad N_{i+1} = N_i + \sigma N_i\Delta W_i.$$

Zadanie 9. Oblicz pierwszy i drugi moment procesu Y_i z zadania 6.

Zadanie 10. Schemat Eulera dla równania

$$dX_t = cX_tdt + \sigma dW_t$$

jest postaci

$$N_0 = X_0, \qquad N_{i+1} = N_i + \sigma e^{-ct_i}\Delta W_i.$$

Oblicz pierwszy i drugi moment procesu N_i.