Zadanie 1. Wykaż, że jeżeli spełnione są warunki CFL oraz $r \geq 0$, $\sigma > 0$, to rozwiązanie schematu dla równania Blacka-Scholesa:

$$\begin{aligned} v^{(i+1,j)} &= v^{(i,j)}\left[1-\sigma^2\frac{\Delta t}{(\Delta z)^2}-r\Delta t\right] \\ &+ v^{(i,j+1)}\left[\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\Delta t}{(\Delta z)^2}+\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{\Delta t}{\Delta z}\right] \\ &+ v^{(i,j-1)}\left[\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\Delta t}{(\Delta z)^2}-\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{\Delta t}{\Delta z}\right] \\ v^{(0,j)} &= \left(e^{j\Delta z}-K\right)^+, \quad j \in Z. \end{aligned}$$

jest nieujemne.

Zadanie 2. (Lemat 2, wykład str. 47) Oblicz C:

$$\frac{1}{2}\sigma^2\frac{e^{\Delta z}-2+e^{-\Delta z}}{(\Delta z)^2}+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{e^{\Delta z}-e^{-\Delta z}}{2\Delta z}-r \quad\leq\quad C(\Delta z)^2.$$

Zadanie 3. (Schemat Milsteina) Oblicz

$$\mathbb{E}\left[\left(1+hc+\sigma\Delta W_i+\frac{1}{2}\sigma^2\left((\Delta W_i)^2-h\right)\right)^2\right].$$

Metoda najszybszego spadku

Zadanie 4. Metoda iteracyjna dana jest wzorem:

$$x^{k+1}=x^k+t_kv^k, \quad v^k=-\frac{\nabla f(x^k)}{||\nabla f(x^k)||}, \quad \left\langle \nabla f(x^k), v^k\right\rangle + t_k\left\langle v^k, H(x^k)v^k\right\rangle = 0,$$

gdzie $H(x^k)$ - macierz drugich pochodnych gładkiej funkcji wypukłej $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Sprawdź wzór na t_k oraz bezpośredni wzór na x^{k+1} (wykład, str. 54).

Zadanie 5. Niech

$$f(x)=a-\langle b,x\rangle+\frac{1}{2}\langle x,Ax\rangle,$$

gdzie A - kwadratowa macierz symetryczna, dodatnio określona. Wykaż, że

$$\nabla f(x) = -b + Ax.$$

Zadanie 6. Wyprowadź równanie dla r^{k+1}:

$$r^{k+1}=r^k-\frac{||r^k||^2}{\langle r^k, Ar^k\rangle}Ar^k, \quad r^k=-b+Ax^k.$$

Zadanie 7. Pokaż, że wektory v^k i v^{k+1} są ortogonalne.

Zadanie 8. Pokaż, że

$$f(x^{k+1})=f(x^k)-\frac{1}{2}\frac{||r^k||^4}{\langle r^k, Ar^k\rangle}.$$

Zadanie 9. Wykonaj dwa kroki metody najszybszego spadku dla następujących danych:

$$a=0, \quad b=(1,1), \quad A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}, \quad x^0=(0,0).$$