

1. Spośród wierzchołków graniastosłupa prawidłowego trójkątnego, którego wszystkie krawędzie mają długość 1, wybieramy losowo 3 różne wierzchołki. Obwód otrzymanego trójkąta jest zmienną losową X . Podaj rozkład zmiennej losowej X .

2. Dany jest rozkład zmiennej losowej X

$X = x_i$	-1	1	2	3
$P(X = x_i)$	1/8	1/8	1/4	c

1. Wyznacz wartość stałej c .
2. Oblicz $P(X \in (0, 2])$.
3. Oblicz wartość oczekiwaną zmiennej losowej X .
4. Oblicz wariancję zmiennej losowej X .

3. Sprawdź, czy funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}(1+x^2), & x \in (0, 1), \\ 0, & x \notin (0, 1). \end{cases}$$

jest gęstością pewnej zmiennej losowej.

4. Dana jest gęstość zmiennej losowej X

$$f(x) = \begin{cases} c(x+2), & x \in (1, 5), \\ 0, & x \notin (1, 5). \end{cases}$$

1. Wyznacz wartość stałej c .
2. Oblicz i zaznacz na wykresie gęstości $P(X \in (2, 4))$.
3. Wyznacz dystrybuantę F .
4. Oblicz $P(X < 3)$
 - i. za pomocą gęstości f ,
 - ii. za pomocą dystrybuanty F .
5. Oblicz wartość oczekiwaną zmiennej losowej X .
6. Oblicz wariancję zmiennej losowej X .

5. Dana jest dystrybuanta zmiennej losowej X

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ \frac{1}{16}(x-1)^2, & 1 < x \leq 5, \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

1. Oblicz $P(X \in (2, 4))$, korzystając ze wzoru na dystrybuantę.
2. Zaznacz na wykresie dystrybuanty prawdopodobieństwo otrzymane w punkcie 1.
3. Wyznacz gęstość zmiennej losowej X .

6. Rozkład łączny pary zmiennych losowych dyskretnych X i Y zadany jest tabelą

	Y			
X		-2	0	1
	0	0.1	0	0.2
	2	0.2	0.2	0.3

1. Wyznacz rozkład brzegowy zmiennej losowej X .
2. Wyznacz rozkład brzegowy zmiennej losowej Y .
3. Sprawdź, czy zmienne losowe X i Y są niezależne.
4. Oblicz kowariancję zmiennych losowych X, Y .

7. Rozkład łączny pary zmiennych losowych dyskretnych X i Y zadany jest tabelą

	Y		
		0	2
X			
	-1	0.045	0.055
	3	0.405	0.495

1. Sprawdź, czy zmienne losowe X i Y są niezależne.
2. Oblicz kowariancję zmiennych losowych X, Y .

8. Dana jest gęstość wektora losowego (X, Y)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{8}(x^2y + y), & x \in (0, 1), y \in (0, 2), \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

1. Wyznacz rozkład brzegowy zmiennej losowej X .
2. Wyznacz rozkład brzegowy zmiennej losowej Y .
3. Sprawdź, czy zmienne losowe X i Y są niezależne.

9. Czy \mathcal{F} jest σ -ciałem podzbiorów Ω ? Odpowiedź uzasadnij.

1. $\Omega = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \Omega\}$.
2. $\Omega = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \Omega\}$.

10. Czy

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}, \dots, \mathbb{N}\}$$

jest σ -ciałem podzbiorów \mathbb{N} ? Odpowiedź uzasadnij.

11. Czy \mathcal{F} jest σ -ciałem podzbiorów Ω ? Odpowiedź uzasadnij.

1. $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, (5, \infty), (-\infty, 5), \{5\}, \Omega\}$.
2. $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, (5, \infty), (-\infty, 5], \Omega\}$.

12. Niech $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 4\}$, $B = \{2\}$. Wyznacz $\sigma(A, B)$.

13. Niech $\Omega = \mathbb{R}$. Wyznacz $\sigma((-1, 2), (5, 6))$.

14. Sprawdź, czy zmienne losowe X i Y są \mathcal{F} -mierzalne, jeżeli $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{\omega_1, \omega_2, \omega_6, \omega_8\}, \{\omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_7\}\}$,

$$X(\omega) = \begin{cases} 10, & \omega \in \{\omega_1, \omega_2, \omega_6, \omega_8\} \\ 20, & \omega \in \{\omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_7\} \end{cases} \quad Y(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_8\} \\ 5, & \omega \in \{\omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7\} \end{cases}$$

15. Zmienne losowe X i Y mają rozkład łączny dany w tabeli

	Y		
		1	2
X			
	-2	0	2/6
	0	1/6	1/6
	3	0	2/6

Wyznacz warunkowe wartości oczekiwane: $\mathbb{E}[X|Y]$ i $\mathbb{E}[Y|X]$.

16. Niech $\Omega = [0, 1]$, P -miara Lebesgue'a na $[0, 1]$.

Wyznacz $\mathbb{E}[f|\mathcal{F}]$, jeżeli $f(x) = -x$, \mathcal{F} jest σ -ciałem generowanym przez zbiory $A_1 = [0, \frac{1}{2})$, $A_2 = [\frac{1}{2}, 1]$.

17. Wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję procesu stochastycznego $(X_t)_{t \in \{2,3,\dots\}}$ spełniającego

$$P(X_t = t) = \frac{1}{t}, \quad P\left(X_t = \frac{t}{t-1}\right) = \frac{t-1}{t}, \quad t = 2, 3, \dots$$

18. Wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję procesu stochastycznego $(X_t)_{t>0}$ o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} t & \text{dla } 0 < x < \frac{1}{t}, \\ 0 & \text{dla pozostałych } x. \end{cases}$$

19. Niech $(W_t)_{t \in [0,T]}$ będzie ruchem Browna. Znajdź rozkład zmiennej losowej

1. $X = 4W_2 - W_4 + W_6$,
2. $X = 3W_5 - W_3 - 2W_9$.

20. Oblicz funkcję wartości oczekiwanej i wariancji procesów

1. $X_t = at + W_t$, $t \in [0, T]$, $a > 0$
2. $X_t = At + W_t$, $t \in [0, T]$, A - zmienna losowa niezależna od W_t o rozkładzie $N(m, s^2)$.

21. Sprawdź, czy $2W_t - W_s$ i $W_t - 2W_s$ są niezależne od $W_s - W_r$, gdy $0 \leq r < s < t < T$.

22. Pokaż, że $\mathbb{E}[W_s W_t] = \min\{s, t\}$ dla $s, t \in [0, T]$.

23. Niech $(W_t)_{t \in [0,T]}$ będzie ruchem Browna. Pokaż, że proces $X_t = -W_t$, $t \in [0, T]$ jest również ruchem Browna.

24. Niech $(W_t)_{t \in [0,T]}$ będzie ruchem Browna. Pokaż, że proces $X_t = W_{t+h} - W_h$, $t \in [0, T]$, $h > 0$ – ustalone jest również ruchem Browna.

25. Niech $(W_t)_{t \in [0,T]}$ będzie ruchem Browna. Pokaż, że proces $X_t = aW_{t/a^2}$, $t \in [0, T]$, $a > 0$ – ustalone jest również ruchem Browna.

26. Niech $(W_t)_{t \in [0,T]}$ i $(B_t)_{t \in [0,T]}$ będą niezależnymi ruchami Browna. Pokaż, że

$$X_t = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_t + B_t), \quad t \in [0, T]$$

jest również ruchem Browna.

27. Oblicz funkcję korelacji procesu $(W_t)_{t \in [0,T]}$.

28. Oblicz funkcję korelacji procesu $X_t = \mu t + \sigma W_t$, $t \in [0, T]$.

29. Oblicz funkcję korelacji procesu $X_t = \frac{W_{t+h} - W_t}{h}$, $t \in [0, T]$, $h > 0$ - ustalone.

30. Oblicz funkcję korelacji procesu $X_t = W_t - tW_1$, $t \in [0, 1]$.

31. Oblicz funkcję korelacji procesu $X_t = e^{\mu t + \sigma W_t}$, $t \in [0, T]$.

Wskazówka: Jeżeli $X \sim N(m, s^2)$, to $\mathbb{E}[e^X] = e^{m + \frac{s^2}{2}}$.

32. Oblicz korelację procesów $(W_t)_{t \in [0,T]}$ i $(X_t)_{t \in [0,T]}$ z zadania 26.

33. Niech $(W_t)_{t \in [0,T]}$ będzie ruchem Browna. Definiujemy proces $X_t = x + W_t$, $t \in [0, T]$ dla ustalonego $x \in \mathbb{R}$. Oblicz $P(X_2 > 0)$. Odp. dla $x = 3$: 0.983.

34. Niech $(W_t)_{t \in [0,T]}$ będzie ruchem Browna. Dany jest proces $X_t = \mu t + \sigma W_t$, $t \in [0, T]$, gdzie $\mu = 0.8$, $\sigma^2 = 0.4$. Oblicz $P(2 < X_8 < 5)$. Odp. 0.2108.

35. Niech dany będzie proces $X_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ dla $n \in \mathbb{N}$, gdzie ξ_i są niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $\mathbb{E}[\xi_i] = 0$ dla $i = 1, 2, \dots$. Niech $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)$. Pokaż, że $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest martyngałem względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Wskazówka: W przypadku dyskretnym warunek martyngału $\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = X_n$, $n \in \mathbb{N}$ jest równoważny warunkowi $\mathbb{E}[X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n] = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

36. Niech dany będzie proces $X_n = \xi_1 \cdot \dots \cdot \xi_n$ dla $n \in \mathbb{N}$, gdzie ξ_i są zmiennymi losowymi mierzalnymi względem niezależnych σ -ciał \mathcal{G}_i oraz takimi, że $\mathbb{E}[\xi_i] = 1$, $i = 1, 2, \dots$. Niech $\mathcal{F}_n = \sigma(\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_n)$. Pokaż, że $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest martyngałem względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

37. Pokaż, że procesy

1. $W_t^2 - t$, $t \in [0, T]$
2. $X_t = W_t^3 - 3tW_t$, $t \in [0, T]$

są martyngałami względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$, gdzie $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, 0 \leq s \leq t \leq T)$.

38. Pokaż, że podane procesy są podmartyngałami

1. $X_t = |W_t|$, $t \in [0, T]$
2. $X_t = W_t^2$, $t \in [0, T]$
3. $X_t = e^{aW_t}$, $t \in [0, T]$

Zmienna losowa $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ ma n -wymiarowy rozkład normalny o wektorze wartości oczekiwanych $\boldsymbol{\mu}$ i macierzy kowariancji Σ , jeżeli istnieje n -wymiarowa macierz A o niezerowym wyznaczniku taka, że

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} + A\mathbf{Z},$$

gdzie składowe wektora $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)$ są niezależnymi zmiennymi losowymi normalnymi oraz $\Sigma = AA^T$.

39. Niech zmienne losowe $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ będą niezależne. Pokaż, że wektor $(X, X + Y)^T$ ma łączny rozkład normalny z parametrami

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_1 + \mu_2)^T, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1^2 \\ \sigma_1^2 & \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \end{bmatrix}.$$

Wskazówka: Wystarczy pokazać, że $(X, X + Y)^T = \boldsymbol{\mu} + AZ$, gdzie $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_1 + \mu_2)^T$, $A = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \sigma_1 & \sigma_2 \end{bmatrix}$.

40. Korzystając z zadania 39 wykaż, że dla $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq T$ wektor losowy $(W_{t_1}, \dots, W_{t_n})^T$ ma łączny rozkład normalny (stąd ruch Browna jest procesem gaussowskim).

Wskazówki:

1. $(W_{t_1}, \dots, W_{t_n})^T = (W_{t_1}, W_{t_1} + (W_{t_2} - W_{t_1}), \dots, W_{t_{n-1}} + (W_{t_n} - W_{t_{n-1}}))^T = (Y_1, Y_1 + Y_2, \dots, Y_1 + \dots + Y_n)^T$
2. Zauważ, że Y_i są niezależne oraz $Y_1 \sim N(0, t_1)$, $Y_i \sim N(0, t_i - t_{i-1})$, $i = 2, \dots, n$.
3. Zauważ, że $Y_1 = \sqrt{t_1}Z_1$, $Y_i = \sqrt{t_i - t_{i-1}}Z_i$, $i = 2, \dots, n$, gdzie $Z_i \sim N(0, 1)$ są niezależne.
4. Stąd $(W_{t_1}, \dots, W_{t_n})^T$ jest przekształceniem liniowym $(Z_1, \dots, Z_n)^T$. Wyznacz macierz tego przekształcenia, tzn. macierz A taką, że $(W_{t_1}, \dots, W_{t_n})^T = A(Z_1, \dots, Z_n)^T$.
5. Podaj macierz kowariancji Σ .

41. Wyznacz wektor wartości oczekiwanych i macierz kowariancji wektora losowego (W_1, W_2, W_3, W_4) .

42. Pokaż, że zmienna losowa $\tau : \Omega \rightarrow \mathcal{T} \cup \{+\infty\}$ jest momentem stopu względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall t \in \mathcal{T} \quad \{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t.$$

43. Pokaż, że jeżeli τ i σ są momentami stopu względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}$, to są nimi również

1. $\tau \wedge \sigma = \min(\tau, \sigma)$
2. $\tau \vee \sigma = \max(\tau, \sigma)$
3. $\tau + \sigma$

Wyznaczymy funkcję tworzącą momenty zmiennej X o standardowym rozkładzie normalnym $N(0, 1)$.

Gęstość zmiennej losowej $X \sim N(0, 1)$: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$, zatem

$$\begin{aligned} M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{tx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2 - 2tx}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-t)^2 - t^2}{2}} dx \\ &= e^{\frac{t^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} dx = e^{\frac{t^2}{2}} \cdot 1, \end{aligned}$$

44. Wyznacz funkcję tworzącą momenty zmiennej X o rozkładzie normalnym $N(0, \sigma^2)$.

45. Obliczając odpowiednią całkę pokaż, że

1. $\mathbb{E}[W_t^2] = t$.
2. $\mathbb{E}[e^{W_t^2}] = \frac{1}{\sqrt{1-2t}}$ dla $t \in (0, \frac{1}{2})$. Można skorzystać z całki $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$.
3. $\mathbb{E}[\cos(2W_t)] = e^{-2t}$ dla $t > 0$.

46. Pokaż, że funkcja charakterystyczna ruchu Browna dana jest wzorem $\mathbb{E}[e^{i\lambda W_t}] = e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Można skorzystać z całki $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

47. Pokaż, że $\mathbb{E}[W_t^4] = 3t^2$. W tym celu oblicz czwartą pochodną funkcji charakterystycznej ruchu Browna, a następnie przyjmij $\lambda = 0$.

48. Wykaż, że funkcja gęstości prawdopodobieństwa przejścia dla ruchu Browna

$$p(t, y, s, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(\frac{-(y-x)^2}{2(t-s)}\right)$$

spełnia równanie Chapmana-Kołmogorowa

$$p(t, y, s, x) = \int_{\mathbb{R}} p(t, y, \tau, z) p(\tau, z, s, x) dz.$$

Wskazówka 1:

$$-\frac{(z-x)^2}{2(\tau-s)} - \frac{(y-z)^2}{2(t-\tau)} = -\left(\frac{1}{2(\tau-s)} + \frac{1}{2(t-\tau)}\right)(z-x)^2 + \frac{y-x}{t-\tau}(z-x) - \frac{(y-x)^2}{2(t-\tau)}.$$

Wskazówka 2:

$$ax^2 - bx + c = \left(\sqrt{a}x - \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c.$$

Wskazówka 3:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

49. Wykaż, że dla ruchu Browna funkcja

$$P(t, y, s, x) = P(X_t \leq y \mid X_s = x), \quad P(t, y, s, x) = \int_{-\infty}^y p(t, \eta, s, x) d\eta$$

spełnia równanie Chapmana-Kołmogorowa:

$$P(t, y, s, x) = \int_{\mathbb{R}} P(t, y, \tau, z) P(\tau, dz, s, x).$$

Wskazówka:

$$\int_{\mathbb{R}} P(t, dy, s, x) = \int_{\mathbb{R}} p(t, y, s, x) dy.$$

$$M_t = \max_{0 \leq s \leq t} W_s, \quad m_t = \min_{0 \leq s \leq t} W_s, \quad T_x = \inf\{t > 0 : W_t = x\}.$$

50. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń

- | | | |
|-----------------------|--------------------|---------------------|
| 1. $M_{10} \geq 8$, | 3. $m_1 \leq -2$, | 5. $T_8 \leq 100$, |
| 2. $M_{100} \geq 8$, | 4. $m_4 \leq -2$, | 6. $T_2 \leq 100$, |

51. Oblicz $P(W_t \leq 0)$ dla wszystkich $t, t \in [0, 1]$.

Wskazówka: F.C. Klebaner, Introduction to stochastic calculus with applications, str. 72.

52. Niech $(X_t)_{t \geq 0}$ będzie ruchem Browna startującym z $x = 3$. Oblicz $P(X_2 > 0)$.

Wskazówka: Zauważmy, że $X_t = W_t + 3$. *Odp.* $P(X_2 > 0) = 0.983$.

53. Pozycja cząstki jest modelowana standardowym ruchem Browna. Załóżmy, że w chwili $t = 2$ cząstka jest na pozycji 1. Oblicz prawdopodobieństwo, że w chwili $t = 5$ cząstka znajdzie się na pozycji co najwyżej 3.

Wskazówka: Pokaż, że $P(W_5 \leq 3 \mid W_2 = 1) = 0.875$.

W tym celu skorzystaj z niezależności przyrostów i własności $W_t - W_s \sim W_{t-s}$.

54. Cząstka porusza się zgodnie z ruchem Browna startującym z $x = 1$. Po trzech godzinach ($t = 3$) cząstka jest na pozycji $x = 1.5$. Oblicz prawdopodobieństwo, że cząstka osiągnie pozycję 2 w ciągu kolejnej godziny.

Wskazówka: Można zauważyć, że dla $t \geq 3$ cząstka porusza się ruchem Browna startującym z $x = 1.5$. Zdarzenie polegające na tym, że cząstka ta osiągnie pozycję 2 w ciągu kolejnej godziny jest równoważne zdarzeniu, że standardowy ruch Browna po raz pierwszy osiągnie $2 - 1.5 = 0.5$ w przedziale $[0, 1]$. Zatem należy obliczyć $P(T_{0.5} \leq 1)$. Prawdopodobieństwo to jest równe 0.617

55. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że istnieje co najmniej jedna chwila $t \in (1, 4)$ taka, że $W_t = 0$.

56. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że w przedziale $(1, 4)$ nie istnieje t takie, że $W_t = 0$. Pokaż, że prawdopodobieństwo zdarzenia, że ruch Browna nie ma zer w przedziale czasowym (a, b) jest równe

$$\frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

57. Sformułuj prawo wielkich liczb i prawo iterowanego logarytmu dla ruchu Browna dla małych t (blisko zera).

Wskazówka: Rozważ proces $B_t = tW_{1/t}$, $t > 0$, który jest również ruchem Browna.

Całka stochastyczna Itô

Niech $\pi_n: 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$. Dla **nielosowych procesów prostych**

$$X_t = c_0 \mathbf{1}_0(t) + \sum_{i=0}^{n-1} c_i \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t), \quad \text{gdzie } c_0, c_1, \dots, c_{n-1} \text{ s\u0105 sta\u0142ymi}$$

ca\u0142k\u0119 It\u00f4 definiujemy wzorem $\int_0^T X_t dW_t = \sum_{i=0}^{n-1} c_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$.

Dla **proces\u00f3w prostych adaptowanych**

$$X_t = \xi_0 \mathbf{1}_0(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t), \quad \text{gdzie } \xi_i \text{ jest } \mathcal{F}_{t_i}\text{-mierzalny, } E[\xi_i^2] < \infty$$

ca\u0142k\u0119 It\u00f4 definiujemy wzorem $\int_0^T X_t dW_t = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$.

Dla proces\u00f3w X_t **ci\u0105\u0142ych, adaptowanych**, spe\u0144niaj\u0105cych $\int_0^T \mathbb{E}[X_t^2] dt < \infty$ ca\u0142k\u0119 It\u00f4 okre\u015blamy

$$\int_0^T X_t dW_t = \lim_{\pi_n} \sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}). \quad (1)$$

58. Oblicz ca\u0142k\u0119 It\u00f4 procesu X_t , gdy

$$1. X_t = \begin{cases} -1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 1, & 1 < t \leq 2 \\ 2, & 2 < t \leq 3 \end{cases} \quad 2. X_t = \begin{cases} 3, & 0 \leq t \leq 2 \\ -1, & 2 < t \leq 5 \\ 4, & 5 < t \leq 6 \end{cases}$$

59. Poka\u017c, \u017ce ca\u0142ka It\u00f4 nie ma w\u0142a\u015bno\u015bci monotoniczno\u015bci.

Wskaz\u00f3wka: Dla $X_t = 0, Y_t = 1$ poka\u017c $P\left(\int_0^1 X_t dW_t < \int_0^1 Y_t dW_t\right) \neq 1$.

60. (*Granica sum ca\u0142kowych Riemanna i It\u00f4*) Wiemy, \u017ce granica sum Riemanna

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(s_i)(t_{i+1} - t_i), \quad s_i \in [t_i, t_{i+1}]$$

aproxymuj\u0105cych ca\u0142k\u0119 funkcji $f: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ **nie zale\u017cy** od wyboru punktu s_i . Jednak granica sum It\u00f4

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(s_i)(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}), \quad s_i \in [t_i, t_{i+1}]$$

aproxymuj\u0105cych ca\u0142k\u0119 stochastyczn\u0105 funkcji $f: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ **zale\u017cy** od wyboru punktu s_i . Aby si\u0119 o tym przekona\u0107, oblicz podane granice

$$1. \lim_{\pi_n} \sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

$$2. \lim_{\pi_n} \sum_{i=0}^{n-1} W_{t_{i+1}} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

Wskaz\u00f3wka 1: Przekształ\u0107 powy\u017csze sumy wed\u0142ug odpowiedniego wzoru

$$1. a(b-a) = \frac{1}{2}[b^2 - a^2 - (b-a)^2] \text{ dla } a = W_{t_i}, b = W_{t_{i+1}}.$$

$$2. b(b-a) = \frac{1}{2}[b^2 - a^2 + (b-a)^2] \text{ dla } a = W_{t_i}, b = W_{t_{i+1}}.$$

Wskaz\u00f3wka 2: Skorzystaj z faktu, \u017ce wariacja kwadratowa ruchu Browna na odcinku $[0, t]$ jest r\u00f3wna

$$[W]_t := \lim_{\pi_n} \sum_{i=0}^{n-1} |W_{t_{i+1}} - W_{t_i}|^2 = t.$$

Kt\u00f3ra suma jest stosowana w aproxymacji ca\u0142ki It\u00f4?

61. Pokaż, że dla nielosowego procesu prostego X_t zachodzi

1. $\mathbb{E} \left[\int_0^T X_t dW_t \right] = 0$
2. $Var \left(\int_0^T X_t dW_t \right) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i^2 (t_{i+1} - t_i)$
3. $\int_0^T X_t dW_t$ jest zmienną losową gaussowską.

62. Korzystając z definicji całki Itô, pokaż $\int_0^T t dW_t = TW_T - \int_0^T W_t dt$.

1. Zdefiniuj $X_t^n = \sum_{i=0}^{n-1} t_i \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1})}(t)$, $t_i = \frac{iT}{n}$ oraz zastosuj (1).
2. Skorzystaj z równości $c(b-a) = (db-ca) - b(d-c)$ dla $a = W_{t_i}$, $b = W_{t_{i+1}}$, $c = t_i$, $d = t_{i+1}$.
3. Skorzystaj z zadania 60, by określić granicę sum Riemanna: $\lim_{\pi_n} \sum_{i=0}^{n-1} W_{t_{i+1}} (t_{i+1} - t_i)$.
4. Pozostaje jeszcze wykazać, że X_t^n zbiega do t w L^2 p.n.p., gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_i (t_{i+1} - t_i) = 0$, tzn.

$$\lim_{\pi_n} \mathbb{E} \left[\int_0^T |X_t^n - t|^2 dt \right] = 0.$$

63. Korzystając z definicji całki Itô, pokaż $\int_0^T W_t^2 dW_t = \frac{1}{3} W_T^3 - \int_0^T W_t dt$.

1. Zdefiniuj $X_t^n = \sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i}^2 \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1})}(t)$, $t_i = \frac{iT}{n}$ oraz zastosuj (1).
2. Skorzystaj z równości $a^2(b-a) = \frac{1}{3}(b^3 - a^3) - a(b-a)^2 - \frac{1}{3}(b-a)^3$.
3. Metodą "dodać-odjąć" rozpisujemy:

$$\sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 = \sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i} (t_{i+1} - t_i) + \sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i} [(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 - (t_{i+1} - t_i)].$$

Granice pierwszej sumy wyznacz przy pomocy zadania 60. Druga suma zbiega do zera^a.

4. Skorzystaj z

$$\lim_{\pi_n} \sum_{i=0}^{n-1} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^3 = 0.$$

^aZ. Brzeźniak, T. Zastawniak, Basic Stochastic Processes, Springer, 2000

Niech X_t będzie adaptowanym procesem *càdlàg* takim, że $\int_0^T X_t^2 dt < \infty$. Wtedy całka Itô $\int_0^T X_t dW_t$ jest dobrze określona.

Jeżeli dodatkowo proces X_t spełnia $\mathbb{E} \left[\int_0^T X_t^2 dt \right] < \infty$, to zachodzą własności

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T X_t dW_t \right] = 0, \quad \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T X_t dW_t \right)^2 \right] = \int_0^T \mathbb{E}[X_t^2] dt.$$

Wniosek: Jeżeli proces X_t jest ciągły i adaptowany, to całka Itô $\int_0^T X_t dW_t$ istnieje. W szczególności, gdy $X_t = f(W_t)$ i f jest funkcją ciągłą na \mathbb{R} .

*proces, którego ścieżki są funkcjami prawostronnie ciągłymi i mającymi lewostronne granice (fr. continue à droite, limite à gauche)

64. Oblicz moment rzędu 1 i 2 procesów

1. $\int_0^1 t dW_t$
2. $\int_0^1 W_t dW_t$
3. $\int_0^1 e^{W_t} dW_t$
4. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}} dW_t$
5. $\int_0^1 e^{W_t^2} dW_t$

65. Niech X_t i Y_t będą procesami adaptowanymi takimi, że $\mathbb{E} \left[\int_0^T X_t^2 dt \right] < \infty$, $\mathbb{E} \left[\int_0^T Y_t^2 dt \right] < \infty$.

Wykaż, że

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T X_t dW_t \int_0^T Y_t dW_t \right] = \int_0^T \mathbb{E}[X_t Y_t] dt.$$

Wskazówka. Oznacz $I_1 = \int_0^T X_t dW_t$, $I_2 = \int_0^T Y_t dW_t$. Przedstaw $I_1 I_2 = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)^2 - \frac{1}{2}I_1^2 - \frac{1}{2}I_2^2$ i zastosuj izometrię.