1. Spośród wierzchołków graniastosłupa prawidłowego trójkątnego, którego wszystkie krawędzie mają długość 1, wybieramy losowo 3 różne wierzchołki. Obwód otrzymanego trójkąta jest zmienną losową X. Podaj rozkład zmiennej losowej X.

2. Dany jest rozkład zmiennej losowej X

$X = x_i$	-1	1	2	3
$P(X = x_i)$	$1/8$	$1/8$	$1/4$	c

1. Wyznacz wartość stałej c.
2. Oblicz $P(X \in (0, 2])$.
3. Oblicz wartość oczekiwaną zmiennej losowej X.
4. Oblicz wariancję zmiennej losowej X.

3. Sprawdź, czy funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}(1 + x^2), & x \in (0, 1), \\ 0, & x \notin (0, 1). \end{cases}$$

jest gęstością pewnej zmiennej losowej.

4. Dana jest gęstość zmiennej losowej X

$$f(x) = \begin{cases} c(x + 2), & x \in (1, 5), \\ 0, & x \notin (1, 5). \end{cases}$$

1. Wyznacz wartość stałej c.
2. Oblicz i zaznacz na wykresie gęstości $P(X \in (2, 4))$.
3. Wyznacz dystrybuantę F.
4. Oblicz $P(X < 3)$
   i. za pomocą gęstości f,
   ii. za pomocą dystrybuanty F.
5. Oblicz wartość oczekiwaną zmiennej losowej X.
6. Oblicz wariancję zmiennej losowej X.

5. Dana jest dystrybuanta zmiennej losowej X

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ \frac{1}{16}(x - 1)^2, & 1 < x \leq 5, \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

1. Oblicz $P(X \in (2, 4))$, korzystając ze wzoru na dystrybuantę.
2. Zaznacz na wykresie dystrybuanty prawdopodobieństwo otrzymane w punkcie 1.
3. Wyznacz gęstość zmiennej losowej X.

6. Rozkład łączny pary zmiennych losowych dyskretnych X i Y zadany jest tabelą

X \ Y	-2	0	1
0	0.1	0	0.2
2	0.2	0.2	0.3

1. Wyznacz rozkład brzegowy zmiennej losowej X.
2. Wyznacz rozkład brzegowy zmiennej losowej Y.
3. Sprawdź, czy zmienne losowe X i Y są niezależne.
4. Oblicz kowariancję zmiennych losowych X, Y.

7. Rozkład łączny pary zmiennych losowych dyskretnych X i Y zadany jest tabelą

X \ Y	0	2
-1	0.045	0.055
3	0.405	0.495

1. Sprawdź, czy zmienne losowe X i Y są niezależne.
2. Oblicz kowariancję zmiennych losowych X, Y.

8. Dana jest gęstość wektora losowego (X, Y)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{8}(x^2y + y), & x \in (0,1),\ y \in (0,2), \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

1. Wyznacz rozkład brzegowy zmiennej losowej X.
2. Wyznacz rozkład brzegowy zmiennej losowej Y.
3. Sprawdź, czy zmienne losowe X i Y są niezależne.

9. Czy $\mathcal{F}$ jest σ-ciałem podzbiorów Ω? Odpowiedź uzasadnij.
1. $\Omega = \{1,2,3\}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, \Omega\}$.
2. $\Omega = \{1,2,3\}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \Omega\}$.

10. Czy

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \ldots, \mathbb{N}\}$$

jest σ-ciałem podzbiorów $\mathbb{N}$? Odpowiedź uzasadnij.

11. Czy $\mathcal{F}$ jest σ-ciałem podzbiorów Ω? Odpowiedź uzasadnij.
1. $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, (5,\infty), (-\infty,5), \{5\}, \Omega\}$.
2. $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, (5,\infty), (-\infty,5], \Omega\}$.

12. Niech $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A = \{1,4\}$, $B = \{2\}$. Wyznacz $\sigma(A,B)$.

13. Niech $\Omega = \mathbb{R}$. Wyznacz $\sigma((-1,2),(5,6))$.

14. Sprawdź, czy zmienne losowe X i Y są $\mathcal{F}$-mierzalne, jeżeli $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{\omega_1,\omega_2,\omega_6,\omega_8\}, \{\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_7\}\}$,

$$X(\omega) = \begin{cases} 10, & \omega \in \{\omega_1,\omega_2,\omega_6,\omega_8\} \\ 20, & \omega \in \{\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_7\} \end{cases} \qquad Y(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in \{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_8\} \\ 5, & \omega \in \{\omega_4,\omega_5,\omega_6,\omega_7\} \end{cases}$$

15. Wyznacz warunkowe wartości oczekiwane $\mathbb{E}[X|Y]$ i $\mathbb{E}[Y|X]$, gdy zmienne losowe mają rozkład łączny zadany tabelą

1.

X \ Y	1	2
-2	0	2/6
0	1/6	1/6
3	0	2/6

2.

X \ Y	0	2	4	5
1	0.1	0.1	0.4	0
10	0.2	0	0.1	0.1

16. Niech $\Omega = [0,1]$, P-miara Lebesgue'a na $[0,1]$. Wyznacz $\mathbb{E}[f|\mathcal{F}]$, jeżeli $f(x) = \sqrt{x}$, $\mathcal{F}$ jest σ-ciałem generowanym przez zbiory $A_1 = [0, \frac{1}{4})$, $A_2 = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, $A_2 = [\frac{1}{2}, 1]$.

17. Wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję procesu stochastycznego $(X_t)_{t\in\{2,3,\ldots\}}$ spełniającego

$$P(X_t = t) = \frac{1}{t}, \qquad P\left(X_t = \frac{t}{t-1}\right) = \frac{t-1}{t}, \qquad t = 2, 3, \ldots$$

18. Wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję procesu stochastycznego $(X_t)_{t>0}$ o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} t & \text{dla } 0 < x < \frac{1}{t}, \\ 0 & \text{dla pozostałych } x. \end{cases}$$

19. Niech $(W_t)_{t\in[0,T]}$ będzie ruchem Browna. Znajdź rozkład zmiennej losowej

1. $X = 4W_2 - W_4 + W_6$,
2. $X = 3W_5 - W_3 - 2W_9$.

20. Oblicz funkcję wartości oczekiwanej i wariancji procesów

1. $X_t = at + W_t, \quad t \in [0,T], \ a > 0$
2. $X_t = At + W_t, \quad t \in [0,T], \ A$ - zmienna losowa niezależna od W_t o rozkładzie $N(m, s^2)$.

21. Sprawdź, czy $2W_t - W_s$ i $W_t - 2W_s$ są niezależne od $W_s - W_r$, gdy $0 \le r < s < t < T$.

22. Pokaż, że $\mathbb{E}[W_s W_t] = \min\{s,t\}$ dla $s,t \in [0,T]$.

23. Niech $(W_t)_{t\in[0,T]}$ będzie ruchem Browna. Pokaż, że proces $X_t = -W_t$, $t \in [0,T]$ jest również ruchem Browna.

24. Niech $(W_t)_{t\in[0,T]}$ będzie ruchem Browna. Pokaż, że proces $X_t = W_{t+h} - W_h$, $t \in [0,T]$, $h > 0$ – ustalone jest również ruchem Browna.

25. Niech $(W_t)_{t\in[0,T]}$ będzie ruchem Browna. Pokaż, że proces $X_t = aW_{t/a^2}$, $t \in [0,T]$, $a > 0$ – ustalone jest również ruchem Browna.

26. Niech $(W_t)_{t\in[0,T]}$ i $(B_t)_{t\in[0,T]}$ będą niezależnymi ruchami Browna. Pokaż, że

$$X_t = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(W_t + B_t\right), \quad t \in [0,T]$$

jest również ruchem Browna.

27. Oblicz funkcję korelacji procesu $(W_t)_{t\in[0,T]}$.

28. Oblicz funkcję korelacji procesu $X_t = \mu t + \sigma W_t$, $t \in [0,T]$.

29. Oblicz funkcję korelacji procesu $X_t = \dfrac{W_{t+h} - W_t}{h}$, $t \in [0,T]$, $h > 0$ - ustalone.

30. Oblicz funkcję korelacji procesu $X_t = W_t - tW_1$, $t \in [0,1]$.

31. Oblicz funkcję korelacji procesu $X_t = e^{\mu t + \sigma W_t}$, $t \in [0,T]$.

Wskazówka: Jeżeli $X \sim N(m, s^2)$, to $\mathbb{E}\left[e^X\right] = e^{m + \frac{s^2}{2}}$.

32. Oblicz korelację procesów $(W_t)_{t\in[0,T]}$ i $(X_t)_{t\in[0,T]}$ z zadania 26.

33. Niech $(W_t)_{t\in[0,T]}$ będzie ruchem Browna. Definiujemy proces $X_t = x + W_t$, $t \in [0,T]$ dla ustalonego $x \in \mathbb{R}$. Oblicz $P(X_2 > 0)$. Odp. dla $x = 3$: 0.983.

34. Niech $(W_t)_{t\in[0,T]}$ będzie ruchem Browna. Dany jest proces $X_t = \mu t + \sigma W_t$, $t \in [0,T]$, gdzie $\mu = 0.8$, $\sigma^2 = 0.4$. Oblicz $P(2 < X_8 < 5)$. Odp. 0.2108.

35. Niech dany będzie proces $X_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ dla $n \in \mathbb{N}$, gdzie ξ_i są niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $\mathbb{E}[\xi_i] = 0$ dla $i = 1, 2, \ldots$ Niech $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Pokaż, że $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest martyngałem względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Wskazówka: W przypadku, gdy zbiór indeksów jest dyskretny, zamiast $\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_m] = X_m$, $m \le n$, $m, n \in \mathbb{N}$ wystarczy sprawdzić $\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = X_n$, $n \in \mathbb{N}$.

36. Niech dany będzie proces $X_n = \xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_n$ dla $n \in \mathbb{N}$, gdzie ξ_i są zmiennymi losowymi mierzalnymi względem niezależnych σ-ciał $\mathcal{G}_i$ oraz takimi, że $\mathbb{E}[\xi_i] = 1$, $i = 1, 2, \ldots$ Niech $\mathcal{F}_n = \sigma(\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_n)$. Pokaż, że $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest martyngałem względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

37. Pokaż, że procesy

1. $W_t^2 - t, \; t \in [0, T]$
2. $X_t = W_t^3 - 3tW_t, \quad t \in [0, T]$

są martyngałami względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$, gdzie $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, 0 \le s \le t \le T)$.

38. Pokaż, że podane procesy są podmartyngałami

1. $X_t = |W_t|, \; t \in [0, T]$
2. $X_t = W_t^2, \; t \in [0, T]$
3. $X_t = e^{aW_t}, \; t \in [0, T]$

Zmienna losowa $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ ma n–**wymiarowy rozkład normalny** o wektorze wartości oczekiwanych $\boldsymbol{\mu}$ i macierzy kowariancji Σ, jeżeli istnieje macierz A stopnia n o niezerowym wyznaczniku taka, że

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\mu} + A\boldsymbol{Z},$$

gdzie składowe wektora $\boldsymbol{Z} = (Z_1, \ldots, Z_n)^T$ są niezależnymi zmiennymi losowymi $Z_i \sim N(0, 1)$, $\Sigma = AA^T$.

39. Niech zmienne losowe $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ będą niezależne. Pokaż, że wektor $(X, X + Y)^T$ ma łączny rozkład normalny z parametrami

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_1 + \mu_2)^T, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1^2 \\ \sigma_1^2 & \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \end{bmatrix}.$$

Wskazówka: Wystarczy pokazać, że $(X, X + Y)^T = \mu + AZ$, gdzie $\mu = (\mu_1, \mu_1 + \mu_2)^T$, $A = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \sigma_1 & \sigma_2 \end{bmatrix}$.

40. Korzystając z zadania 39 wykaż, że dla $0 \le t_1 \le \ldots \le t_n \le T$ wektor losowy $(W_{t_1}, \ldots, W_{t_n})^T$ ma łączny rozkład normalny (stąd ruch Browna jest procesem gaussowskim).
Wskazówki:

1. $$\begin{aligned}(W_{t_1}, \ldots, W_{t_n})^T &= \big(W_{t_1}, W_{t_1} + (W_{t_2} - W_{t_1}), \ldots, W_{t_{n-1}} + (W_{t_n} - W_{t_{n-1}})\big)^T \\ &= (Y_1, Y_1 + Y_2, \ldots, Y_1 + \ldots + Y_n)^T\end{aligned}$$
2. Zauważ, że Y_i są niezależne oraz $Y_1 \sim N(0, t_1)$, $Y_i \sim N(0, t_i - t_{i-1})$, $i = 2, \ldots, n$.
3. Zauważ, że $Y_1 = \sqrt{t_1} Z_1$, $Y_i = \sqrt{t_i - t_{i-1}} Z_i$, $i = 2, \ldots, n$, gdzie $Z_i \sim N(0, 1)$ są niezależne.
4. Stąd $(W_{t_1}, \ldots, W_{t_n})^T$ jest przekształceniem liniowym $(Z_1, \ldots, Z_n)^T$. Wyznacz macierz tego przekształcenia, tzn. macierz A taką, że $(W_{t_1}, \ldots, W_{t_n})^T = A(Z_1, \ldots, Z_n)^T$.
5. Podaj macierz kowariancji Σ.

41. Wyznacz wektor wartości oczekiwanych i macierz kowariancji wektora losowego (W_1, W_2, W_3, W_4).

Wyznaczymy funkcję tworzącą momenty zmiennej X o standardowym rozkładzie normalnym $N(0,1)$.

Gęstość zmiennej losowej $X \sim N(0,1)$: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$, zatem

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{tx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2-2tx}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-t)^2-t^2}{2}} dx$$
$$= e^{\frac{t^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} dx = e^{\frac{t^2}{2}} \cdot 1,$$

42. Wyznacz funkcję tworzącą momenty zmiennej X o rozkładzie normalnym $N(0, \sigma^2)$.

43. Obliczając odpowiednią całkę pokaż, że

1. $\mathbb{E}[W_t^2] = t$.
2. $\mathbb{E}[e^{W_t^2}] = \frac{1}{\sqrt{1-2t}}$ dla $t \in (0, \frac{1}{2})$. Można skorzystać z całki $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$.
3. $\mathbb{E}[\cos(2W_t)] = e^{-2t}$ dla $t > 0$.

44. Pokaż, że funkcja charakterystyczna ruchu Browna dana jest wzorem $\mathbb{E}[e^{i\lambda W_t}] = e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Można skorzystać z całki $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

45. Pokaż, że $\mathbb{E}[W_t^4] = 3t^2$. W tym celu oblicz czwartą pochodną funkcji charakterystycznej ruchu Browna, a następnie przyjmij $\lambda = 0$.

46. Wykaż, że funkcja gęstości prawdopodobieństwa przejścia dla ruchu Browna

$$p(t, y, s, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(\frac{-(y-x)^2}{2(t-s)}\right)$$

spełnia równanie Chapmana-Kołmogorowa

$$p(t, y, s, x) = \int_{\mathbb{R}} p(t, y, \tau, z) p(\tau, z, s, x) dz.$$

Wskazówka 1:

$$-\frac{(z-x)^2}{2(\tau-s)} - \frac{(y-z)^2}{2(t-\tau)} = -\left(\frac{1}{2(\tau-s)} + \frac{1}{2(t-\tau)}\right)(z-x)^2 + \frac{y-x}{t-\tau}(z-x) - \frac{(y-x)^2}{2(t-\tau)}.$$

Wskazówka 2:

$$ax^2 - bx + c = \left(\sqrt{a}x - \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c.$$

Wskazówka 3:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

47. Wykaż, że dla ruchu Browna funkcja

$$P(t, y, s, x) = P(X_t \le y \mid X_s = x), \qquad P(t, y, s, x) = \int_{-\infty}^{y} p(t, \eta, s, x) d\eta$$

spełnia równanie Chapmana-Kołmogorowa:

$$P(t, y, s, x) = \int_{\mathbb{R}} P(t, y, \tau, z) P(\tau, dz, s, x).$$

Wskazówka:

$$\int_{\mathbb{R}} P(t, dy, s, x) = \int_{\mathbb{R}} p(t, y, s, x) dy.$$

48. Pokaż, że jeżeli zmienna losowa $\tau : \Omega \to \mathcal{T} \cup \{+\infty\}$ jest momentem stopu względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathcal{T}}$, to

$$\forall_{t\in\mathcal{T}}\ \{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t\,.$$

Uwaga: Równoważność zachodzi dla $\mathcal{T} = \mathbb{N}$.

49. Pokaż, że jeżeli τ i σ są momentami stopu względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathcal{T}}$, to są nimi również

1. $\tau \wedge \sigma = \min(\tau, \sigma)$
2. $\tau \vee \sigma = \max(\tau, \sigma)$
3. $\tau + \sigma$, gdy $\mathcal{T} = \mathbb{N}$. *Wskazówka:* Możesz skorzystać z Zadania 48.

$$\boxed{M_t = \max_{0\le s\le t} W_s, \qquad m_t = \min_{0\le s\le t} W_s, \qquad T_x = \inf\{t > 0 :\ W_t = x\}.}$$

50. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń

1. $M_{10} \geq 8$, *Odp.* 0.0114
2. $M_{100} \geq 8$, *Odp.* 0.4238
3. $m_1 \leq -2$, *Odp.* 0.0456
4. $m_4 \leq -2$, *Odp.* 0.3174
5. $T_8 \leq 100$, *Odp.* 0.4238
6. $T_2 \leq 100$, *Odp.* 0.8414

51. Oblicz $P(W_t \leq 0)$ dla wszystkich $t \in [0, 1]$.
Wskazówka: F.C. Klebaner, Introduction to stochastic calculus with applications, str. 72.

52. Niech $(X_t)_{t\geq 0}$ będzie ruchem Browna startującym z $x = 3$. Oblicz $P(X_2 > 0)$.
Wskazówka: Zauważmy, że $X_t = W_t + 3$. *Odp.* 0.983

53. Pozycja cząstki jest modelowana standardowym ruchem Browna. Załóżmy, że w chwili $t = 2$ cząstka jest na pozycji 1. Oblicz prawdopodobieństwo, że w chwili $t = 5$ cząstka znajdzie się na pozycji co najwyżej 3.

Wskazówka: Pokaż, że $P(W_5 \leq 3 \mid W_2 = 1) = 0.8749$.
W tym celu skorzystaj z niezależności przyrostów i własności $W_t - W_s \sim W_{t-s}$.

54. Cząstka porusza się zgodnie z ruchem Browna startującym z $x = 1$. Po trzech godzinach ($t = 3$) cząstka jest na pozycji $x = 1.5$. Oblicz prawdopodobieństwo, że cząstka osiągnie pozycję 2 w ciągu kolejnej godziny.

Wskazówka: Można zauważyć, że dla $t \geq 3$ cząstka porusza się ruchem Browna startującym z $x = 1.5$. Zdarzenie polegające na tym, że cząstka ta osiągnie pozycję 2 w ciągu kolejnej godziny jest równoważne zdarzeniu, że standardowy ruch Browna po raz pierwszy osiągnie $2 - 1.5 = 0.5$ w przedziale $[0, 1]$.
Zatem należy obliczyć $P(T_{0.5} \leq 1)$. Prawdopodobieństwo to jest równe 0.617

55. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że istnieje co najmniej jedna chwila $t \in (1, 4)$ taka, że $W_t = 0$.
Odp. 2/3

56. Pokaż, że prawdopodobieństwo zdarzenia, że ruch Browna nie ma zer w przedziale czasowym (a, b) jest równe

$$\frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

57. Sformułuj prawo wielkich liczb i prawo iterowanego logarytmu dla ruchu Browna dla małych t (blisko zera).

Wskazówka: Rozważ proces $B_t = tW_{1/t}$, $t > 0$, który jest również ruchem Browna.

Całka stochastyczna Itô

Niech π_n: $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$. Dla **nielosowych procesów prostych**

$$X_t = c_0\,\mathbf{1}_0(t) + \sum_{i=0}^{n-1} c_i\,\mathbf{1}_{(t_i,t_{i+1}]}(t), \qquad \text{gdzie } c_0, c_1, \ldots, c_{n-1} \text{ są stałymi}$$

całkę Itô definiujemy wzorem $\displaystyle\int_0^T X_t\,dW_t = \sum_{i=0}^{n-1} c_i\left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right).$

Dla **procesów prostych adaptowanych**

$$X_t = \xi_0\,\mathbf{1}_0(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i\,\mathbf{1}_{(t_i,t_{i+1}]}(t), \qquad \text{gdzie } \xi_i \text{ jest } \mathcal{F}_{t_i}\text{-mierzalny, } E[\xi_i^2] < \infty$$

całkę Itô definiujemy wzorem $\displaystyle\int_0^T X_t\,dW_t = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i\left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right).$

Dla procesów X_t **ciągłych, adaptowanych**, spełniających $\displaystyle\int_0^T \mathbb{E}[X_t^2]dt < \infty$ całkę Itô określamy

$$\int_0^T X_t\,dW_t = \lim_{\pi_n} \sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i}\left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right). \tag{1}$$

58. Oblicz całkę Itô procesu X_t, gdy

1. $X_t = \begin{cases} -1, & 0 \le t \le 1 \\ 1, & 1 < t \le 2 \\ 2, & 2 < t \le 3 \end{cases}$ 2. $X_t = \begin{cases} 3, & 0 \le t \le 2 \\ -1, & 2 < t \le 5 \\ 4, & 5 < t \le 6 \end{cases}$

59. Pokaż, że całka Itô nie ma własności monotoniczności.

Wskazówka: Dla $X_t = 0$, $Y_t = 1$ pokaż $P\left(\displaystyle\int_0^1 X_t\,dW_t < \int_0^1 Y_t\,dW_t\right) \neq 1.$

60. (*Granica sum całkowych Riemanna i Itô*) Wiemy, że granica sum Riemanna

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(s_i)(t_{i+1} - t_i), \quad s_i \in [t_i, t_{i+1}]$$

aproksymujących całkę funkcji $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ **nie zależy** od wyboru punktu s_i. Jednak granica sum Itô

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(s_i)(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}), \quad s_i \in [t_i, t_{i+1}]$$

aproksymujących całkę stochastyczną funkcji $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ **zależy** od wyboru punktu s_i. Aby się o tym przekonać, oblicz podane granice

1. $\displaystyle\lim_{\pi_n} \sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$
2. $\displaystyle\lim_{\pi_n} \sum_{i=0}^{n-1} W_{t_{i+1}}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$

Wskazówka 1: Przekształć powyższe sumy według odpowiedniego wzoru

1. $a(b-a) = \frac{1}{2}[b^2 - a^2 - (b-a)^2]$ dla $a = W_{t_i}$, $b = W_{t_{i+1}}$.
2. $b(b-a) = \frac{1}{2}[b^2 - a^2 + (b-a)^2]$ dla $a = W_{t_i}$, $b = W_{t_{i+1}}$.

Wskazówka 2: Skorzystaj z faktu, że wariacja kwadratowa ruchu Browna na odcinku $[0,t]$ jest równa

$$[W]_t := \lim_{\pi_n} \sum_{i=0}^{n-1} \left|W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right|^2 = t.$$

Która suma jest stosowana w aproksymacji całki Itô?

61. Pokaż, że dla nielosowego procesu prostego X_t zachodzi

1. $\mathbb{E}\left[\int_0^T X_t\, dW_t\right] = 0$
2. $Var\left(\int_0^T X_t\, dW_t\right) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i^2 (t_{i+1} - t_i)$
3. $\int_0^T X_t\, dW_t$ jest zmienną losową gaussowską.

62. Korzystając z definicji całki Itô, pokaż $\int_0^T t\, dW_t = TW_T - \int_0^T W_t\, dt$.

1. Zdefiniuj $X_t^n = \sum_{i=0}^{n-1} t_i\, \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1})}(t), \quad t_i = \frac{iT}{n}$ oraz zastosuj (1).

2. Skorzystaj z równości $c(b-a) = (db - ca) - b(d-c)$ dla $a = W_{t_i},\ b = W_{t_{i+1}},\ c = t_i,\ d = t_{i+1}$.

3. Skorzystaj z zadania 60, by określić granicę sum Riemanna: $\lim_{\pi_n} \sum_{i=0}^{n-1} W_{t_{i+1}}(t_{i+1} - t_i)$.

4. Pozostaje jeszcze wykazać, że X_t^n zbiega do t w L^2 p.n.p., gdy $\lim_{n\to\infty} \max_i (t_{i+1} - t_i) = 0$, tzn.

$$\lim_{\pi_n} \mathbb{E}\left[\int_0^T |X_t^n - t|^2\, dt\right] = 0.$$

63. Korzystając z definicji całki Itô, pokaż $\int_0^T W_t^2 dW_t = \frac{1}{3} W_T^3 - \int_0^T W_t dt$.

1. Zdefiniuj $X_t^n = \sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i}^2\, \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1})}(t), \quad t_i = \frac{iT}{n}$ oraz zastosuj (1).

2. Skorzystaj z równości $a^2(b-a) = \frac{1}{3}(b^3 - a^3) - a(b-a)^2 - \frac{1}{3}(b-a)^3$.

3. Metodą "dodać–odjąć" rozpisujemy:

$$\sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 = \sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i}(t_{i+1} - t_i) + \sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i}\left[(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 - (t_{i+1} - t_i)\right].$$

Granicę pierwszej sumy wyznacz przy pomocy zadania 60. Druga suma zbiega do zera[a].

4. Skorzystaj z

$$\lim_{\pi_n} \sum_{i=0}^{n-1} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^3 = 0.$$

[a] Z. Brzeźniak, T. Zastawniak, Basic Stochastic Processes, Springer, 2000

Niech X_t będzie adaptowanym procesem *càdlàg* takim, że $\int_0^T X_t^2\,dt < \infty$. Wtedy całka Itô $\int_0^T X_t\,dW_t$ jest dobrze określona.

Jeżeli dodatkowo proces X_t spełnia $\mathbb{E}\left[\int_0^T X_t^2\,dt\right] < \infty$, to zachodzą własności

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T X_t\,dW_t\right] = 0, \qquad \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T X_t\,dW_t\right)^2\right] = \int_0^T \mathbb{E}[X_t^2]\,dt.$$

Wniosek: Jeżeli proces X_t jest ciągły i adaptowany, to całka Itô $\int_0^T X_t\,dW_t$ istnieje.
W szczególności, gdy $X_t = f(W_t)$ i f jest funkcją ciągłą na $\mathbb{R}$.

*proces, którego ścieżki są funkcjami prawostronnie ciągłymi i mającymi lewostronne granice (fr. continue à droite, limite à gauche)

64. Oblicz moment rzędu 1 i 2 procesów

1. $\displaystyle\int_0^1 t\,dW_t$
2. $\displaystyle\int_0^1 W_t\,dW_t$
3. $\displaystyle\int_0^1 e^{W_t}\,dW_t$
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dW_t$
5. $\displaystyle\int_0^1 e^{W_t^2}\,dW_t$

65. Niech X_t i Y_t będą procesami ciągłymi, adaptowanymi takimi, że $\mathbb{E}\left[\int_0^T X_t^2\,dt\right] < \infty$, $\mathbb{E}\left[\int_0^T Y_t^2\,dt\right] < \infty$. Wykaż, że

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T X_t\,dW_t \int_0^T Y_t\,dW_t\right] = \int_0^T \mathbb{E}[X_tY_t]\,dt.$$

Wskazówka. Oznacz $I_1 = \displaystyle\int_0^T X_t\,dW_t$, $I_2 = \displaystyle\int_0^T Y_t\,dW_t$. Przedstaw $I_1I_2 = \frac{1}{2}(I_1+I_2)^2 - \frac{1}{2}I_1^2 - \frac{1}{2}I_2^2$ i zastosuj izometrię.