LISTA nr 1: Proste modele dyskretne 1

Oznaczenia 1. *Rynek jednookresowy.*

- $t \in \{0, 1\}$
- $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_K\}$ - *możliwe stany rynku*
- P - *miara probabilistyczna na* Ω, $P(\omega) > 0, \omega \in \Omega$
- B_t - *proces konta bankowego (proces cen instrumentu bez ryzyka (obligacji)), gdzie* $B_0 = 1$, r - *stopa procentowa*, $r = B_1 - 1, r \geq 0$
- N - *liczba instrumentów ryzykownych (akcji),* $\quad n \in \{1, \ldots, N\}$
- $S_t = (S_t^{(1)}, \ldots, S_t^{(N)})$ - *proces cen, gdzie* $S_t^{(n)}$- *cena akcji* n *w chwili* t
- $H = (H_0, H_1, \ldots, H_N)$ - *strategia inwestycyjna (portfel), gdzie* H_0 - *liczba obligacji,* H_n - *liczba akcji* n
- V_t - *proces wartości portfela*
- G - *proces zysku*
- $\tilde{S}_t, \tilde{V}_t, \tilde{G}$ - *zdyskontowane procesy: cen, wartości portfela i zysku*

Zadanie 1. Załóżmy, że $K = 2, N = 1, r = \frac{1}{9}, S_0^{(1)} = 5, S_1^{(1)}(\omega_1) = \frac{20}{3}, S_1^{(1)}(\omega_2) = \frac{40}{9}$. Określ $V, \tilde{V}, G, \tilde{G}$ dla dowolnego portfela H.

Zadanie 2. Załóżmy, że $K = 2, N = 1, r = 0, S_0^{(1)} = 10, S_1^{(1)}(\omega_1) = 12, S_1^{(1)}(\omega_2) = 10$. Czy strategia $H = (-10, 1)$ dopuszcza arbitraż?

Zadanie 3. Załóżmy, że $K = 3, N = 2, r = \frac{1}{9}, S_0^{(1)} = 5, S_0^{(2)} = 10, S_1^{(1)}(\omega_1) = \frac{60}{9}, S_1^{(1)}(\omega_2) = \frac{60}{9}, S_1^{(1)}(\omega_3) = \frac{40}{9}, S_1^{(2)}(\omega_1) = \frac{40}{3}, S_1^{(2)}(\omega_2) = \frac{80}{9}, S_1^{(2)}(\omega_3) = \frac{80}{9}$. Podaj przykład strategii $H = (H_0, H_1, H_2)$, która dopuszcza arbitraż.

Zadanie 4. Udowodnij, że w modelu z zadania 1 nie ma możliwości arbitrażu (znajdź miarę martyngałową).

Zadanie 5. Załóżmy, że $K = 3, N = 1, r = \frac{1}{9}, S_0^{(1)} = 5, S_1^{(1)}(\omega_1) = \frac{20}{3}, S_1^{(1)}(\omega_2) = \frac{40}{9}, S_1^{(1)}(\omega_3) = \frac{30}{9}$. Znajdź wszystkie miary martyngałowe.

Zadanie 6. Pokaż, że w modelu z zadania 3 nie istnieje miara martyngałowa (a tym samym istnieje możliwość arbitrażu).

Zadanie 7. W (bezarbitrażowym) modelu z zadania 1 załóż dodatkowo: $X(\omega_1) = 7, X(\omega_2) = 2$. Zakładając, że instrument X jest osiągalny podaj jego wartość w chwili $t = 0$. Podaj i zinterpretuj strategię $H = (H_0, H_1)$ replikującą X, aby przekonać się, że X jest rzeczywiście osiągalny.

Zadanie 8. W modelu z zadania 1 załóż dodatkowo, że $X = \max\{0, S^{(1)} - 5\}$. Zakładając, że instrument X jest osiągalny podaj jego wartość w chwili $t = 0$. Podaj strategię $H = (H_0, H_1)$ replikującą X, aby przekonać się, że X jest rzeczywiście osiągalny.

Zadanie 9. Sprawdź, czy rynek z zadania 1 jest zupełny (oblicz rząd odpowiedniej macierzy).

Zadanie 10. W modelu z zadania 1 załóż dodatkowo: $S_0^{(2)} = 54, S_1^{(2)}(\omega_1) = 70, S_1^{(2)}(\omega_2) = 50$ (czyli teraz $N = 2$). Sprawdź, że mimo modyfikacji modelu miara wyznaczona w zadaniu 4 jest nadal miarą martyngałową. Określ, czy model jest zupełny.

Zadanie 11. Sprawdź, czy rynek z zadania 5 jest zupełny (oblicz rząd odpowiedniej macierzy). Jak inaczej można to stwierdzić?