LISTA nr 2: Proste modele dyskretne 2

Oznaczenia 1. *Rynek wielookresowy (skończony).*

- $t \in \{0, 1, \dots, T\}$
- $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_K\}$, *P - miara probabilistyczna na* Ω, $P(\omega) > 0, \omega \in \Omega$
- $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t,\ t = 0, \dots, T\}$ *- filtracja* ($\mathcal{F}_t$ *- zasób wiedzy o rynku zebrany do chwili* t)
- B_t *- stochastyczny proces konta bankowego,* $B_0 = 1$, $B_t(\omega) > 0, r_t = \frac{B_t - B_{t-1}}{B_{t-1}}$ *- stopa procentowa na przedziale* $(t-1, t)$
- $S_t^{(n)}$ *- nieujemny stochastyczny proces cen,* $n \in \{1, \dots, N\}$
- $H = (H_0, H_1, \dots, H_N)$ *- strategia inwestycyjna, wektor procesów stochastycznych*

Zadanie 1. Niech $K = 8$, $T = 3$. Dany jest podział Ω w chwili $t = 1$:

$$\mathcal{P}_1 = \{\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}, \{\omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}\}.$$

Które podziały są możliwe w chwili $t = 2$? Prawidłowe struktury informacji przedstaw w postaci drzew.

1. $\mathcal{P}_2 = \{\{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4\}, \{\omega_5, \omega_6\}, \{\omega_7, \omega_8\}\}$,
2. $\mathcal{P}_2 = \{\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \{\omega_3, \omega_4\}, \{\omega_5, \omega_6\}, \{\omega_7, \omega_8\}\}$
3. $\mathcal{P}_2 = \{\{\omega_1\}, \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}, \{\omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}\}$
4. $\mathcal{P}_2 = \{\{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4, \omega_5\}, \{\omega_6, \omega_7, \omega_8\}\}$,

Zadanie 2. Podaj filtrację $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t,\ t = 0, 1, 2, 3\}$ dla zadania 1.1.

Zadanie 3. Niech $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}, \{\omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}\}$. Czy podane zmienne losowe są mierzalne względem $\mathcal{F}_1$?

1. $X(\omega) = \begin{cases} 6, & \omega \in \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\} \\ 8, & \omega \in \{\omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\} \end{cases}$
2. $Y(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in \{\omega_1, \omega_3, \omega_5, \omega_7\} \\ 0, & \omega \in \{\omega_2, \omega_4, \omega_6, \omega_8\} \end{cases}$

Zadanie 4. Niech $K = 4$, $T = 2$. Ponieważ $N = 1$, oznaczmy $S_t^{(1)} = S_t$.

ω_k	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$
ω_1	$S_0 = 5$	$S_1 = 8$	$S_2 = 9$
ω_2	$S_0 = 5$	$S_1 = 8$	$S_2 = 6$
ω_3	$S_0 = 5$	$S_1 = 4$	$S_2 = 6$
ω_4	$S_0 = 5$	$S_1 = 4$	$S_2 = 3$

1. Narysuj drzewo i podaj filtrację $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t,\ t = 0, 1, 2\}$.
2. Niech $B_t = (1 + r)^t$, $r \geq 0$. Wyznacz proces wartości V_t, $t = 0, 1, 2$ oraz proces zysku G_t, $t = 1, 2$.
3. Czy strategia H jest samofinansująca?