

LISTA nr 3: Warunkowa wartość oczekiwana

Zadanie 1. Sprawdź, czy \mathcal{F} jest σ -ciałem podzbiorów Ω .

1. $\Omega = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \Omega\}$.
2. $\Omega = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \Omega\}$.
3. $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}, \dots, \Omega\}$.
4. $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, (5, \infty), (-\infty, 5), \{5\}, \Omega\}$.
5. $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, (5, \infty), (-\infty, 5], \Omega\}$.

Zadanie 2. Niech $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 4\}$, $B = \{2\}$. Wyznacz $\sigma(A, B)$.

Zadanie 3. Niech $\Omega = \mathbb{R}$. Wyznacz $\sigma((-1, 2), (5, 6))$.

Zadanie 4. Niech X będzie zmienną losową, oznaczającą liczbę orłów otrzymaną przy dwukrotnym rzucie monetą, A - zdarzeniem polegającym na wypadnięciu orła w pierwszym rzucie. Wyznacz $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$.

Zadanie 5. Doświadczenie polega na jednokrotnym rzucie kostką. Zmienna losowa X przyjmuje wartość 0, gdy wypadła liczba parzysta i 1, gdy nieparzysta. Zmienna losowa Y przyjmuje wartość równą liczbie wypadniętych oczek. Wyznacz $\mathbb{E}[X|Y]$ oraz $\mathbb{E}[Y|X]$.

Zadanie 6. Wektor losowy (X, Y) ma rozkład:

	X	0	2	3
Y				
	-2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0
	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{8}$

Wyznacz:

1. $\mathbb{E}[X|\sigma(Y)]$
2. $\mathbb{E}[Y|\sigma(X)]$

Zadanie 7. Niech $\Omega = [0, 1]$, P -miara Lebesgue'a na $[0, 1]$. Wyznacz $\mathbb{E}[g|\mathcal{F}]$, jeżeli

1. $g(x) = \sqrt{x}$, \mathcal{F} jest σ -ciałem generowanym przez zbiory $[0, \frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{4}, 1]$.
2. $g(x) = -x$, \mathcal{F} jest σ -ciałem generowanym przez zbiory $[0, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{3}, 1]$.