LISTA nr 4: **Wzór Itô dla ruchu Browna i procesów Itô**

Zadanie 1. Stosując wzór Itô, oblicz różniczkę stochastyczną dY_t procesów:

1. $Y_t = W_t^2$
2. $Y_t = \frac{1}{3}W_t^3$
3. $Y_t = \exp(W_t)$
4. $Y_t = \cos(W_t)$
5. $Y_t = \mathrm{arctg}(W_t)$
6. $Y_t = \frac{1}{1+W_t^2}$
7. $Y_t = \frac{W_t}{1+W_t^2}$
8. $Y_t = 2 + t + \exp(W_t)$
9. $Y_t = \exp\left(\frac{1}{2}t\right)\sin(W_t)$

Zadanie 2. Oblicz:

1. $[\exp(W_t), W_t]$
2. $\left[W_t^2, W_t\right]$
3. $\left[W_t^k, W_t\right]$

Zadanie 3. Sprawdź, że podane procesy są martyngałami:

1. $M_t = W_t$
2. $M_t = W_t^2 - t$
3. $M_t = W_t^3 - 3tW_t$
4. $M_t = t^2W_t - 2\int_0^t rW_r dr$

Zadanie 4. (*Twierdzenie Itô o reprezentacji*) Dla podanych zmiennych losowych F znajdź $\mathcal{F}_t$-adaptowany proces φ_t taki, że

$$F = \mathbb{E}[F] + \int_0^T \varphi_t dW_t.$$

1. $F = W_T$
2. $F = W_T^2$
3. $F = \exp(W_T)$
4. $F = \int_0^T W_t dt$
5. $F = W_T^3$
6. $\exp\left(\frac{1}{2}T\right)\cos(W_T)$

Zadanie 5. Niech X_t będzie procesem Itô. Zastosuj wzór Itô do X_t^2 a następnie wyznacz stąd wariację kwadratową.

Zadanie 6. Niech $X_t \geq 0$ będzie procesem Itô takim, że $\mu(x) = bx + c$ oraz $\sigma(x) = 2\sqrt{x}$. Wyznacz różniczkę stochastyczną procesu $Y_t = \sqrt{X_t}$.

Zadanie 7. Niech $X_t = \exp\left(W_t - \frac{1}{2}t\right)$. Wyznacz $d(X_t^2)$.

Zadanie 8. Niech $X_t = tW_t$. Wyznacz $[X, X]_t$.

Zadanie 9. Niech $X_t = (1 - t)$ oraz $Y_t = \int_0^t \frac{1}{1-s} dW_s$. Wyznacz $d(X_tY_t)$.

Zadanie 10. (*Wzór Itô dla funkcji 2-zmiennych*) Napisz wzór Itô dla funkcji:

1. $f(x, y) = xy$
2. $f(x, t) = \exp\left(x - \frac{1}{2}t\right)$
3. $f(x, y) = \frac{x}{y}$. Niech $X_t = tW_t$ oraz $Y_t = \exp(W_t)$. Wyznacz $d\left(\frac{X_t}{Y_t}\right)$.