

LISTA nr 6: Model Blacka-Scholesa

Zadanie 1. Proces cen akcji dany jest wzorem:

$$S_t = S_0 e^{H_t}, \quad H_t = \int_0^t \left(\mu_s - \frac{\sigma_s^2}{2} \right) ds + \int_0^t \sigma_s dW_s.$$

Pokaż, że $dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dW_t$.

Zadanie 2. Cena obligacji spełnia równanie różniczkowe zwyczajne:

$$dB_t = r_t B_t dt, \quad B_0 = 1.$$

Pokaż, że $B_t = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right)$.

Zadanie 3. Wyraż proces cen S_t w terminach procesu \tilde{W}_t określonego wzorem:

$$\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \theta_s ds, \quad \theta_t = \frac{\mu_t - r_t}{\sigma_t}.$$

Zadanie 4. Pokaż, że $d(Z_t^{-1}) = Z_t^{-1}(\theta_t dW_t + \theta_t^2 dt)$ dla procesu Z_t określonego wzorem:

$$Z_t = \exp\left(-\int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds\right).$$

Zadanie 5. Pokaż, że strategia „kup i trzymaj” (buy-and-hold): $\phi_t = (\alpha_t, \beta_t)$, $\alpha_t \equiv 0$, $\beta_t \equiv a > 0$ jest strategią samofinansującą.

Zadanie 6. Udowodnij, że strategia $\alpha_t = B_t^{-1} S_t$, $\beta_t \equiv 0$ ma proces bogactwa $V_t(\varphi) = S_t$ (a więc taki jak strategia „kup i trzymaj”) ale nie jest samofinansująca.

Zadanie 7. Pokaż, że średnia wartość ceny akcji rośnie ze stopą μ , czyli $\mathbb{E}S_t = S_0 e^{\mu t}$. Dodatkowo pokaż, że $\text{Var}S_t = S_0^2 e^{2\mu t} (e^{\sigma^2 t} - 1)$.

Wskazówka: Jeżeli $X \sim \mathcal{N}(m, s^2)$, $Y = e^X$, to $\mathbb{E}Y = e^{m + \frac{s^2}{2}}$, $\text{Var}Y = e^{2m + s^2} (e^{s^2} - 1)$.

Zadanie 8. Cena początkowa akcji jest równa 100, oczekiwana stopa zwrotu 10%, zmienność $\sigma = 40\%$. Oblicz wartość oczekiwaną ceny akcji za rok oraz jej wariancję.

Zadanie 9. Pokaż, że w modelu Blacka-Scholesa: $\mathbb{E}[Z_T] = 1$. (Wtedy z tw. Girsanowa miara Q określona wzorem $\frac{dQ}{dP} = Z_T$ jest równoważna mierze probabilistycznej P .)

Zadanie 10. Wyznacz cenę europejskiej opcji kupna *call*, o terminie realizacji 3 miesiące. Cena początkowa opcji jest równa 52, cena wykonania 50, roczna stopa wolna od ryzyka $r = 12\%$, $\sigma = 30\%$.

Zadanie 11. Wyznacz cenę europejskiej opcji sprzedaży *put*, o terminie realizacji 6 miesięcy. Cena początkowa opcji jest równa 69, cena wykonania 70, roczna stopa wolna od ryzyka $r = 5\%$, $\sigma = 35\%$.