LISTA nr 7: Wskaźniki greckie

Zadanie 1. Pokaż, że

$$S_t n(d) - Ke^{-r(T-t)} n(D) = 0,$$

gdzie

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left(\ln\frac{S_t}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)\right), \\ D &= d - \sigma\sqrt{T-t}, \\ n(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}. \end{aligned}$$

Zadanie 2. Korzystając z zadania 1, udowodnij poniższe wzory na współczynniki wrażliwości dla europejskiej opcji *call*.

1. $\Delta = \frac{\partial C_t}{\partial S_t} = N(d)$,
2. $\Gamma = \frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t^2} = \frac{1}{S_t \sigma\sqrt{T-t}} n(d)$,
3. $\vartheta = \frac{\partial C_t}{\partial \sigma} = S_t\sqrt{T-t}\, n(d)$,
4. $\Theta = \frac{\partial C_0}{\partial T} = \frac{S_0\sigma}{2\sqrt{T}} n(d) + rKe^{-rT}N(D) \quad$ (dla $t = 0$).

Wskaźniki greckie z wykorzystaniem rachunku Malliavina

Zadanie 3. Załóżmy, że parametr $\alpha \in \{S_0, \sigma, r\}$ oraz funkcja wypłaty $H = f(F_\alpha)$. Cena opcji w chwili $t = 0$ dana jest wzorem $V_0 = \mathbb{E}_Q[e^{-rT}H]$. Wyznacz $\frac{\partial V_0}{\partial \alpha}$.

Zadanie 4. Stosując wzór na całkowanie przez części (*Fakt 12* z wykładu dla $u = 1$) udowodnij:

1. $\mathbb{E}_Q\left[f^{'}(S_T)S_T\right] = \frac{1}{\sigma T}\mathbb{E}_Q\left[f(S_T)W_T\right]$
2. $\mathbb{E}_Q\left[f^{''}(S_T)S_T^2\right] = \frac{1}{\sigma T}\mathbb{E}_Q\left[f(S_T)\left(\frac{W_T^2}{\sigma T} - \frac{1}{\sigma} - W_T\right)\right]$
3. $\mathbb{E}_Q\left[f^{'}(S_T)S_T(W_T - \sigma T)\right] = \mathbb{E}_Q\left[f(S_T)\left(\frac{W_T^2}{\sigma T} - \frac{1}{\sigma} - W_T\right)\right]$

Zadanie 5. Korzystając z zadań 3 i 4, podaj wzór na deltę, gammę i vegę dla europejskiej opcji *call*.

Zadanie 6. Podaj deltę, gammę i vegę dla europejskiej opcji *call* z funkcją wypłaty:

1. $H = f(S_T) = (S_T - K)^+$
2. $H = f(S_T) = e^{S_T}$