1.18. Wykazać, że:

a) dołączenie nowego warunku do układu warunków ograniczających w zadaniu PM z kryterium minimalizacji nie może zmniejszyć optymalnej wartości jego funkcji celu;

b) pominięcie jakiegoś warunku w układzie warunków ograniczających zadania PM z kryterium minimalizacji nie może powiększyć optymalnej wartości jego funkcji celu.

(Patrz konwencja przyjęta dla $f_{\min}$ w definicji 1.3.)

1.19. Dla zadania PM z kryterium maksymlizacji sformułować twierdzenia analogiczne do twierdzeń sformułowanych w zadaniu 1.18.

1.20. Udowodnić twierdzenie:

Jeżeli zadania Min $\{f(\mathbf{x}): \mathbf{x} \in \mathscr{X}\}$, Min $\{g(\mathbf{x}): \mathbf{x} \in \mathscr{X}\}$ oraz Min $\{f(\mathbf{x})+g(\mathbf{x}): \mathbf{x} \in \mathscr{X}\}$ mają rozwiązania optymalne, to $\min\{f(\mathbf{x})+g(\mathbf{x}): \mathbf{x} \in \mathscr{X}\} \geqslant \min\{f(\mathbf{x}): \mathbf{x} \in \mathscr{X}\}+\min\{g(\mathbf{x}): \mathbf{x} \in \mathscr{X}\}$. Pokazać na przykładzie (z funkcjami jednej zmiennej), że może być:

$$\min\{f(\mathbf{x})+g(\mathbf{x}): \mathbf{x} \in \mathscr{X}\} > \min\{f(\mathbf{x}): \mathbf{x} \in \mathscr{X}\}+\min\{g(\mathbf{x}): \mathbf{x} \in \mathscr{X}\}.$$

• **1.21.** Zakład wytwarza trzy wyroby oznaczone I, II, III. Wśród środków niezbędnych do ich produkcji dwa (A, B) występują w ograniczonych ilościach. Ich nakłady jednostkowe oraz zasoby dostępne w rozpatrywanym okresie, a także ceny wyrobów i zysk na jednostce każdego wyrobu podaje tablica 1.4. (Jaką interpretację ma ujemny zysk?)

Produkcja musi mieć następującą strukturę: wartość produkcji wyrobu I nie powinna przekroczyć 40% wartości całej produkcji, wyrobu I należy wytworzyć co najmniej 40 jednostek, stosunek wielkości produkcji wyrobów II i III musi być równy 2 : 3. Chcemy skonstruować plan produkcji tych wyrobów, zapewniający jak największy łączny zysk.

Tablica 1.4

Środki	Nakłady jednostkowe środków na poszczególne wyroby			Zasoby środków
	I	II	III	
A	2	3	1	220
B	4	0	2,5	250
Cena	5	7	3	×
Zysk na jednostce wyrobu	1	−1	0,5	

Zbudować model matematyczny tego zagadnienia.

• **1.22.** a) Gospodarstwo zakupuje dla zwierząt siano, kiszonki i paszę treściwą. Ilość siana musi być trzykrotnie większa od łącznej ilości zakupionych kiszonek i paszy treściwej. Zakupiona mieszanka musi zapewnić stadu minimalne ilości białka i węglowodanów. Zawartość tych składników odżywczych w tonie poszczególnych rodzajów paszy oraz minimalne dzienne zapotrzebowanie na te składniki — w odpowiednich jednostkach — podaje tablica 1.5.

Tablica 1.5

Składniki	Rodzaje pasz Zawartość składników w 1 tonie paszy			Minimalna dzienna dawka składnika dla stada
	Siano	Kiszonki	Pasze treściwe	
Białko	60	40	40	1000
Węglowodany	30	60	40	800

Wiedząc, że kg siana kosztuje 5 zł, kiszonki 10 zł, pasz treściwych 13 zł, należy wyznaczyć najtańszą mieszankę pasz zaspokajającą tygodniowe zapotrzebowanie stada na wymienione składniki odżywcze. Zbudować model matematyczny tego zagadnienia.

b) Zbudować model matematyczny analogicznego zagadnienia jak w a), jeśli gospodarstwo ma możliwość zakupu n rodzajów pasz i stadu trzeba zapewnić minimalne dzienne dawki m wyróżnionych składników odżywczych, przy czym znane są liczby:

a_{ij} $(i \in \overline{1,m}, j \in \overline{1,n})$ — zawartość i-tego składnika w 1 tonie paszy j-tego rodzaju,

b_i $(i \in \overline{1,m})$ — minimalne dzienne zapotrzebowanie stada na i-ty składnik,

c_j $(j \in \overline{1,n})$ — cena 1 tony paszy j-tego rodzaju.

1.23. Zakład produkuje cztery wyroby: A, B, C, D. Do ich produkcji niezbędne są: praca maszyn M_1, M_2, M_3, M_4, surowce S_1, S_2, S_3 oraz robocizna R. Odpowiednie dane liczbowe podaje tablica 1.6.

Tablica 1.6

Środki	Wyroby				Zasoby środków
	Nakłady środków na jednostkę wyrobu				
	A	B	C	D	
M_1	2	5	0	0	3 000
M_2	2	3	0	4	2 500
M_3	0	6	7	3	3 200
M_4	0	0	10	15	3 600
S_1	10	15	23	16	25 000
S_2	0	10	0	20	20 000
S_3	30	0	20	5	30 000
R	10	2	3	15	100 000
Zysk na jednostce produktu	2	3	6	5	×

Zakład musi uwzględnić w planie produkcji następującą strukturę produkcji: wyrobu A należy wytworzyć dwa razy mniej niż wyrobu B, ale dwa razy więcej niż wyrobu D i półtora raza więcej niż wyrobu C.

Przy jakim planie produkcji tych wyrobów zakład osiągnie największy zysk?

Przy jakim planie produkcji wielkość produkcji wyrobu A będzie największa?

Zbudować model matematyczny dla każdego z tych zagadnień.

1.24. Zakład futrzarski produkuje męskie i damskie czapki zimowe. Na wyprodukowanie czapki męskiej potrzeba 0,6 m² skóry, czapki damskiej – 0,4 m². Zakład ma w magazynie 12700 m² skóry. Pracochłonność czapki męskiej oszacowano na 0,9 h, czapki damskiej – 1 h. Łączny zasób czasu pracy, jakim dysponuje zakład wynosi 19680 godzin. Zapotrzebowanie na czapki futrzane w rozpatrywanym okresie szacuje się na co najwyżej 10 tys. czapek męskich i co najmniej 15 tys. czapek damskich. Cena sprzedaży czapki męskiej wynosi 2 tys. zł, czapki damskiej 2400 zł. Koszty wyprodukowania wynoszą odpowiednio: 1200 zł i 1350 zł.

Przy jakim planie produkcji czapek zakład osiągnie największy zysk? Zbudować model matematyczny zagadnienia.

1.25. Fabryka mebli produkuje stoły, krzesła, regały i biurka, wykorzystując do tego dwa rodzaje desek. Na okres objęty planem fabryka ma do dyspozycji 1600 m desek I rodzaju oraz 1100 m desek II rodzaju, a posiadane

Tablica 1.7

Środki	Wyroby			
	Nakłady na jednostkę wyrobu			
	stoły	krzesła	regały	biurka
Deski I rodzaju [m]	5	1	12	7
Deski II rodzaju [m]	2	2	9	4
Zasoby siły roboczej [osobodni]	3	2	6	3
Zysk na jednostce	110	60	180	95

zasoby siły roboczej szacuje się na 900 osobogodzin. Informacje o jednostkowych nakładach poszczególnych rodzajów desek oraz siły roboczej podaje tablica 1.7.

Spełniając minimalne potrzeby odbiorców, fabryka musi wyprodukować co najmniej: 50 sztuk stołów, 150 sztuk krzeseł, 25 sztuk regałów oraz 10 sztuk biurek.

Przy jakim planie produkcji fabryka osiągnie maksymalny zysk?

Zbudować model matematyczny zagadnienia.

1.26. Wytwórnia produkująca soki jabłkowe ma dostarczyć na rynek w poszczególnych kwartałach co najmniej następujące liczby butelek soku:

I kwartał – 20 000
II kwartał – 20 000
III kwartał – 50 000
IV kwartał – 25 000

Na wyprodukowanie butelki soku potrzeba 0,5 kg jabłek i 0,05 kg cukru. Przewidywane ceny jabłek oraz maksymalne wielkości ich zakupu w poszczególnych kwartałach podaje tablica 1.8. Cena cukru jest stała i wynosi

Tablica 1.8

Kwartał	Ceny za kg [zł]	Maksymalna wielkość zakupu [t]
I	18	17
II	20	10
III	17	20
IV	15	15

46 zł za kilogram. Z uwagi na brak możliwości magazynowania owoców, muszą one być zużyte w tym kwartale, w którym zostały zakupione. Dostawy cukru w poszczególnych kwartałach wynoszą: I kw. – 2 t, II kw. – 2 t, III kw. – 2 t, IV kw. – 1 t. Wytwórnia może produkować „na skład" ponosząc przy tym koszty magazynowania. Dla uproszczenia za okres „składowania" butelki soku wyprodukowanej w i-tym kwartale, a sprzedanej w j-tym kwartale ($i, j \in \overline{1, 4}$, $i \leqslant j$) przyjmuje się $(j-i)$ kwartałów. Koszt magazynowania butelki soku w ciągu jednego kwartału wynosi 0,5 zł. Zakłada się, że produkcja roczna musi być sprzedana w ciągu danego roku.

Jaki roczny plan produkcji (z podziałem na kwartały) zapewni realizację planowych zadań przy minimalnych łącznych kosztach zakupu jabłek i magazynowania soków?

Zbudować model matematyczny zagadnienia.

● **1.27.** Przedsiębiorstwo otrzymało zadanie wyprodukowania co najmniej 80 jednostek wyrobu W_1 oraz co najmniej 120 jednostek wyrobu W_2. Każdy z wyrobów może być produkowany zarówno na maszynie M_1, jak i M_2. Potrzebne informacje zawiera tablica 1.9. Maksymalny czas pracy maszyn jest ograniczony i wynosi odpowiednio 19 i 16 godzin.

Jak rozdzielić produkcję wyrobów na poszczególne maszyny, aby koszt realizacji zadania był najmniejszy?

Zbudować model matematyczny problemu.

Tablica 1.9

M_i	W_j: Wydajność w jednostce czasu [jednostka/h]		W_j: Jednostkowe koszty produkcji [zł/jednostka]	
	W_1	W_2	W_1	W_2
M_1	8	5	2	4
M_2	7	9	3	1

1.28. Na trzech obrabiarkach (I, II, III) można wytwarzać trzy detale A, B, C. Z analizy zapotrzebowania wynika, że detalu A trzeba wytworzyć co najwyżej 100 sztuk, detalu B co najwyżej 50 sztuk, detalu C co najwyżej 80 sztuk. Odpowiednie dane zawiera tablica 1.10.

Tablica 1.10

Detale	Obrabiarki: Wydajność obrabiarki [szt./h]			Obrabiarki: Zysk na jedn. wyrobu [zł/szt.]		
	I	II	III	I	II	III
A	1	2	1,5	4	2	4
B	3	6	4,5	4	3	6
C	5	10	7,5	3	5	4
Czas pracy obrabiarki [h]	30	20	40	×	×	×

Jak zaplanować produkcję wyrobów, aby osiągnąć maksymalny zysk? Zbudować model matematyczny zagadnienia.

1.29. Kombinat rolny ma opracować plan zasiewów czterech podstawowych zbóż. Przy opracowaniu planu należy uwzględnić następujące postulaty:

– zbożami należy obsiać 4500 ha, w tym pszenicą nie więcej niż 1500 ha,

– łączne nakłady pracy na produkcję zbóż nie mogą przekroczyć 400 000 roboczogodzin,

– łączne zasoby nawozów wynoszą w rozpatrywanym okresie 450 000 kg,

– przy przyjętej przeciętnej wysokości plonów każdej uprawy żąda się, aby łączny udział zbiorów żyta i pszenicy w całości zbiorów czterech zbóż stanowił nie więcej niż 70%, a przy tym planowany zbiór pszenicy nie powinien być mniejszy od 8000 kwintali, a jęczmienia – nie mniejszy od 4000 kwintali. Informacje o nakładach i przeciętnych plonach podaje tablica 1.11.

Należy opracować plan zasiewów maksymalizujący przewidywaną łączną wielkość zbiorów czterech zbóż.

Zbudować model matematyczny zagadnienia.

Tablica 1.11

Nakłady	Rodzaje zbóż: pszenica	żyto	jęczmień	owies
Praca żywa [h/ha]	75	65	70	45
Nawozy sztuczne [kg/ha]	115	100	110	120
Przeciętne plony [q/ha]	40	31	35	25

1.30. Na pewnym terenie planuje się zbudowanie nowego osiedla mieszkaniowego dla 100 tys. osób, przy czym w grę wchodzą budynki 5-, 8- i 11-piętrowe. Struktura mieszkaniowa poszczególnych budynków jest następująca:

5-piętrowe: 10 mieszkań typu M2,
10 mieszkań typu M3,
20 mieszkań typu M4,
10 mieszkań typu M5;

8-piętrowe: 14 mieszkań typu M2,
15 mieszkań typu M3,
25 mieszkań typu M4,
15 mieszkań typu M5;

11-piętrowe: 22 mieszkania typu M2,
10 mieszkań typu M3,
40 mieszkań typu M4,
20 mieszkań typu M5.

Zakłada się, że mieszkanie typu Mk jest zamieszkiwane przez k-osobowe rodziny (k=2, 3, 4, 5). Przewidywana struktura rodzin – przyszłych mieszkańców osiedla – wyznacza następującą strukturę zapotrzebowania na mieszkania:

$$M4-40\%, \quad M2-35\%, \quad M3-15\%, \quad M5-10\%.$$

Z pewnych względów udział budynków 8-piętrowych nie powinien przekraczać 40% wszystkich budynków. Mieszkania tego samego typu mają tę samą powierzchnię we wszystkich budynkach, a mianowicie: M2 – 35 m^2, M3 – 44 m^2, M4 – 56 m^2, M5 – 65 m^2. Koszt budowy m^2 powierzchni mieszkalnej wynosi 11 000 zł w budynku 5-piętrowym, 13000 zł w budynku 8-piętrowym oraz 14 000 zł w budynku 11-piętrowym.

W opisanym zadaniu chodzi o ustalenie liczby budynków poszczególnych rodzajów gwarantujących poniesienie minimalnego łącznego kosztu ich budowy.

Zbudować model matematyczny zagadnienia.

1.31. Pięć kserografów różnych typów wymaga naprawy. Naprawą zajmuje się pięć spółdzielni usługowych, przy czym każda z nich może przyjąć do naprawy dowolny, ale tylko jeden kserograf. Koszty naprawy (w ty-

Tablica 1.12

Spółdzielnia	Typ kserografu I	II	III	IV	V
A	7	5	8	5	9
B	7	6	8	6	8
C	11	5	7	7	6
D	8	7	5	12	8
E	9	8	6	6	9

siącach zł) poszczególnych typów kserografów w tych spółdzielniach podaje tablica 1.12.

Jak rozdzielić kserografy pomiędzy spółdzielnie, aby łączny koszt ich naprawy był jak najmniejszy?

Zbudować model matematyczny zagadnienia.

1.32. Przewiduje się uruchomienie produkcji nowego wyrobu. Oszacowano zapotrzebowanie na ten wyrób w wysokości 100 tys. sztuk. Na podstawie wstępnego rozeznania ustalono, że możliwe jest wybudowanie zakładów wytwarzających ten produkt tylko w trzech miejscowościach *A*, *B*, *C*. Koszty wybudowania zakładu, koszty wyprodukowania jednostki wyrobu oraz maksymalne w okresie rocznym zdolności produkcyjne zakładu w różnych miejscowościach są różne. Podaje je tablica 1.13.

Tablica 1.13

Miejscowość	Koszt wybudowania zakładu [mln zł]	Koszt produkcji jednostki wyrobu [zł]	Maksymalna zdolność produkcyjna [tysiąc sztuk]
A	100	48	70
B	130	40	60
C	120	44	80

Zakładając, że każdy zakład będzie pracował przez 10 lat, a jednostkowe koszty produkcji nie zmienią się w tym okresie, wyznaczyć miejsca lokalizacji zakładów oraz wielkość rocznej ich produkcji tak, aby łączna suma kosztów poniesionych na budowę i kosztów produkcji była najmniejsza.

Zbudować model matematyczny zadania.