Zadanie 1. Wykaż, że zbiór $BV[a,b]$ funkcji o ograniczonym wahaniu na $[a,b]$ jest przestrzenią unormowaną z normą $\|u\| = |u(a)| + TV(u)$, gdzie

$$TV(u) = \sup_{a=t_0<\ldots<t_n=b} \sum_{i=1}^{n} |u(t_i) - u(t_{i-1})| < \infty \qquad (\textit{wahanie}).$$

Zadanie 2. Wykaż, że jeżeli $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest monotoniczna, to $u \in BV[a,b]$ oraz

$$TV(u) = |u(b) - u(a)|.$$

Zadanie 3. Niech $a < c < b$. Wykaż, że jeżeli $u : [a,b] \to \mathbb{R}$, to $u \in BV[a,b]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u_1 \in BV[a,c]$ i $u_2 \in BV[c,b]$, gdzie $u_1 = u_{|[a,c]}$, $u_2 = u_{|[c,b]}$ oraz zachodzi $TV(u) = TV(u_1) + TV(u_2)$.

Zadanie 4. Oblicz normy w $BV[0,1]$ funkcji:

a) $u(t) = at + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, b) $u(t) = t^2$, c) $u(t) = t^2 - t$, d) $u(t) = \sin 6t$.

Zadanie 5. Wykaż, że jeżeli $f \in C^1[a,b]$, to $TV(f) = \int_a^b |f'(t)|dt < \infty$.

Zadanie 6. Oblicz wahanie funkcji $f(t) = \sin t,\ t \in [0, \frac{7}{2}\pi]$.

Zadanie 7. Oblicz wahanie funkcji $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ danej wzorem:

a) $f(t) = t^3 - 3t,\ t \in [0,1]$, b) $f(t) = t^2 - 4t - 2,\ t \in [1,3]$.

Zadanie 8. Wykaż, że jeżeli $f, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ całkowalne względem niemalejącej funkcji g oraz $f \leq h$, to

$$\int_a^b f(t)dg(t) \leq \int_a^b h(t)dg(t).$$

Zadanie 9. Wykaż, że jeżeli g jest funkcją o wahaniu skończonym, to

$$\int_a^b dg(t) = g(b) - g(a).$$

Zadanie 10. Oblicz całki Riemanna-Stieltjesa:

a) $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{t}dt^3$, b) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{t}{1+t^2} d(\ln t)$, c) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin t d(\sin t)$.