Zadanie 63. Dany jest funkcjonał

$$J(x) = \int_{t_1}^{t_2} f(t, x(t), \dot{x}(t))dt, \quad x(t_1) = x_1, \quad x(t_2) = x_2, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Oblicz pochodną Gateux $\delta J(x,h)$, gdzie h - wariacje dopuszczalne: $h(t_1) = h(t_2) = 0$.

Zadanie 64. Znajdź ekstremale podanych funkcjonałów. Czy ta ekstremala minimalizuje lub maksymalizuje funkcjonał?

1. $J(x) = \displaystyle\int_0^1 x^2(t)dt, \quad x(0) = 0,\ x(1) = 1$
2. $J(x) = \displaystyle\int_0^1 \big(x^2(t) + \dot{x}^2(t)\big)\, dt, \quad x(0) = 0,\ x(1) = 1$
3. $J(x) = \displaystyle\int_0^1 \dot{x}^2(t)dt, \quad x(0) = 0,\ x(1) = 1$
4. $J(x) = \displaystyle\int_0^1 \big(3x^2(t) + 3t^2\dot{x}(t)\big)\, dt, \quad x(0) = 0,\ x(1) = 1$
5. $J(x) = \displaystyle\int_{-1}^1 x^3(t)dt, \quad x(-1) = x(1) = 0$
6. $J(x) = \displaystyle\int_1^2 t^3\dot{x}^2(t)dt, \quad x(1) = 5,\ x(2) = 2$
7. $J(x) = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 + \dot{x}^2(t)}dt, \quad x(0) = 0,\ x(1) = 1$
8. $J(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \big(\dot{x}^2(t) - x^2(t)\big)\, dt, \quad x(0) = 0,\ x(\pi/2) = 0$
9. $J(x) = \displaystyle\int_0^1 \big(tx(t) + x^2(t) - 2x^2(t)\dot{x}(t)\big)\, dt, \quad x(0) = 0,\ x(1) = a$
10. $J(x) = \displaystyle\int_0^1 \left(\dot{x}(t) - x(t)\right)^2 dt, \quad x(0) = 0,\ x(1) = 2$