

**Zadanie 11.** Oblicz normę funkcjonału  $x^* \in C([0, 1])^*$  danego wzorem

1.  $x^*x = \int_0^1 tx(t)dt$
2.  $x^*x = x(\frac{1}{2}) + \int_0^1 2x(t)dt$
3.  $x^*x = x(1) - x(0)$
4.  $x^*x = x(1) - \int_0^1 x(t)dt$

**Zadanie 12.** Dla danego funkcjonału  $f \in C([0, 1])^*$  znajdź funkcję  $y$  o wahanu ograniczonym na  $[0, 1]$  taką, że  $f(x) = \int_0^1 x(t)dy(t)$  dla każdego  $x \in C([0, 1])$ . Wyznacz  $\|f\|$ .

$$a) f(x) = x(1/3), \quad b) f(x) = \int_0^1 x(t)dt, \quad c) f(x) = \int_0^1 x(t) \cos(\pi t)dt, \quad d) f(x) = x(0) - \int_0^{\frac{1}{2}} x(2t)dt.$$

**Zadanie 13.** Niech funkcje  $u_t : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \in [0, 1]$  określone są następująco: dla  $t = 0$   $u_0 \equiv 0$ , dla  $t \in (0, 1]$   $u_t \equiv 1$  w  $[0, t]$ ,  $u_t \equiv 0$  w  $(t, 1]$ . Dla danego funkcjonału  $F : C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$

- i) Oblicz  $\|F\|$ .
- ii) Przyjmując za  $\tilde{F}$  rozszerzenie  $F$  na przestrzeń  $B([0, 1])$  (funkcji ograniczonych z normą supremum) takie, że  $\|F\| = \|\tilde{F}\|$ , wyznacz funkcję  $v(t) = \tilde{F}(u_t)$ .
- iii) Sprawdź, czy  $v \in BV([0, 1])$  ( $NBV([0, 1])$ ) i ew. oblicz  $TV(v)$ . Porównaj  $TV(v)$  z  $\|F\|$ .
- iv) Wyznacz  $G(x) = \int_0^1 x(t)dv(t)$  i porównaj z  $F$ .

$$a) F(x) = x(1/2), \quad b) F(x) = 2x(0) - \int_0^{1/2} x(t)dt + x(2/3), \quad c) F(x) = x(0) + 3x(1/2) - x(1),$$

$$d) F(x) = -2x(1) + \int_{1/3}^{2/3} t^2 x(t)dt + x(1/2).$$

**Zadanie 14.** Przedstaw funkcjonal  $F : C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$  w postaci  $F(x) = \int_0^1 x(t)dv(t)$ , gdzie  $v \in NBV([0, 1])$ . Sprawdź równość  $\|F\| = \|v\|$ .

$$a) F(x) = x(0), \quad b) F(x) = \int_{1/3}^{1/2} x(t)dv(t), \quad c) F(x) = x(\frac{1}{2}) - 2 \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} x(t)dv(t),$$

$$d) F(x) = x(0) - 2x(1), \quad e) F(x) = x(\frac{1}{3}) - \int_{\frac{1}{3}}^1 x(t)dv(t).$$

**Zadanie 15.** Znajdź wszystkie funkcje  $x \in C([0, 1])$  współliniowe z funkcjonalem  $x^* \in C([0, 1])^*$  danym wzorem

$$a) x^*x = \int_0^1 x(t)dt, \quad b) x^*x = x(1/2), \quad c) x^*x = x(0) + x(1), \quad d) x^*x = x(0) - x(1).$$

**Zadanie 16.** Wiedząc, że każdy funkcjonal  $x^* \in C([0, 1])^*$  jest postaci:

$$x^*x = \langle x, x^* \rangle = \int_0^1 x(t)dv(t), \quad v \in NBV([0, 1]),$$

znajdź wszystkie funkcjonały współliniowe z funkcją:

$$a) x(t) = 1, \quad b) x(t) = 1 - 2t, \quad c) x(t) = t^2 - t + 3, \quad d) x(t) = |4t - 2| - 1.$$

**Zadanie 17.** Jak wyglądają funkcjonały  $v \in NBV([0, 2\pi])$  współliniowe z  $x \in C([0, 2\pi])$ , gdy:

1.  $x(t) = \sin t$ ,  $t \in [0, 2\pi]$
2.  $x(t) = \sin t$ ,  $t \in [0, \pi]$ ,  $x(t) = \frac{3}{4} \sin t$ ,  $t \in (\pi, 2\pi]$ ,
3.  $x(t) = \frac{1}{3} - |\sin t|$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ ,
4.  $x(t) = t$ ,  $t \in [0, 1]$ ,  $x(t) = 1$ ,  $t \in [1, 2]$ ,  $x(t) = 3 - t$ ,  $t \in [2, 3]$ .