Teoria optymalizacji II

Zad. 1. Znajdź wielomian stopnia 0 optymalny w sensie normy L^2 dla funkcji $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

1. $f(t) = \sqrt{t}$,
2. $f(t) = \dfrac{1}{1+t}$,
3. $f(t) = \sin t$.

Odp. 1. $u(t) = \frac{2}{3}$, 2. $u(t) = \ln 2$, 3. $u(t) = 1 - \cos 1$.

Zad. 2. Znajdź wielomian stopnia co najwyżej 1 optymalny w sensie normy L^2 dla funkcji $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

1. $f(t) = t^2$,
2. $f(t) = \sqrt{t}$.

Odp. 1. $u(t) = t - \frac{1}{6}$, 2. $u(t) = \frac{4}{5}t + \frac{4}{15}$.

Zad. 3. Znajdź wielomian stopnia co najwyżej 2 optymalny w sensie normy L^2 dla funkcji $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

1. $f(t) = t^3$,
2. $f(t) = \sqrt{t}$.

Odp. 1. $u(t) = \frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{5}t + \frac{1}{20}$, 2. $u(t) = -\frac{4}{7}t^2 + \frac{48}{35}t + \frac{6}{35}$.

Zad. 4. Znajdź wielomian stopnia 0 optymalny w sensie normy L^4 dla funkcji $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(t) = t$.

Odp. $u(t) = \frac{1}{2}$.

Zad. 5. Znajdź wielomian stopnia 0 optymalny w sensie normy L^∞ dla funkcji $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

1. $f(t) = \dfrac{t}{1+t}$,
2. $f(t) = \sqrt{t}$,
3. $f(t) = \sin t$.

Odp. 1. $u(t) = \frac{1}{4}$, 2. $u(t) = \frac{1}{2}$, 3. $u(t) = \frac{1}{2}\sin 1$.

Zad. 6. Niech $V = \mathbb{R}^2$ z normą l^p dla $p > 1$, tzn. jeżeli $v = (v_1, v_2) \in V$, to $||v||_p = (|v_1|^p + |v_2|^p)^{1/p}$. Niech A będzie podzbiorem przestrzeni V. Wyznacz wszystkie funkcjonały $v^* \in V^*$

1. zerujące wszystkie elementy podzbioru A,
2. współliniowe ze wszystkimi elementami podzbioru A,

gdy A jest zbiorem a) jednoelementowym, b) dwuelementowym.

Zad. 7. Niech $V = \mathbb{R}^2$ z normą l^p dla $p > 1$, $A \subset V$. Niech Z będzie zbiorem tych funkcjonałów, które zerują wszystkie elementy zbioru A, natomiast W - zbiorem tych funkcjonałów, które zerują wszystkie elementy zbioru Z. Pokaż, że $A \subset W$.

Zad. 8. Niech $A \subset V$, $W \subset V^*$. Definiujemy

$$A^\perp = \{v^* \in V^* \,:\, \forall_{v \in A} \;\; v^*(v) = 0\},$$
$$^\perp W = \{v \in V \,:\, \forall_{v^* \in W} \;\; v^*(v) = 0\}.$$

Pokaż, że $A \subset {}^\perp(A^\perp)$.

Zad. 9. Niech V będzie przestrzenią unormowaną. Normę funkcjonału $f : V \to \mathbb{R}$ definiujemy

$$\|f\| = \inf\{m \in \mathbb{R} \,:\, \forall_{x \in V} \; |f(x)| \le m\|x\|\}.$$

Wykaż, że

$$\|f\| = \sup_{x \in V \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \le 1} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| = 1} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

Zad. 10. Oblicz z definicji normę funkcjonału $f \in (C[0,1])^*$, gdy

1. $f(x) = 5x(t)$,
2. $f(x) = x(1) - x(0)$,
3. $f(x) = x\left(\frac{1}{2}\right) + 2\int_0^1 x(t)\,dt$,
4. $f(x) = x(1) - \int_0^1 x(t)\,dt$,
5. $f(x) = \int_0^1 tx(t)\,dt$.

Zad. 11. Dla danego funkcjonału $f \in (C[0,1])^*$ znajdź funkcję v o wahaniu skończonym na $[0,1]$ taką, że

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\,dv(t).$$

1. $f(x) = x\left(\frac{1}{2}\right)$,
2. $f(x) = x(0)$,
3. $f(x) = x(1)$,
4. $f(x) = x(0) - x(1)$,
5. $f(x) = \frac{3}{4}x\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4}x\left(\frac{1}{2}\right)$,
6. $f(x) = x(0) + 3x\left(\frac{1}{2}\right) - x(1)$,
7. $f(x) = \int_0^1 x(t)\,dt$,
8. $f(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} x(t)\,dt$,
9. $f(x) = x(0) - \frac{1}{2}\int_0^1 x(t)\,dt$,
10. $f(x) = x\left(\frac{1}{2}\right) + \int_{\frac{1}{2}}^1 x(t)\,dt$,
11. $f(x) = x\left(\frac{1}{2}\right) + \int_{\frac{3}{2}}^1 x(t)\,dt$,
12. $f(x) = x\left(\frac{1}{2}\right) + \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{7}{8}} x(t)\,dt$,
13. $f(x) = x\left(\frac{3}{4}\right) + \int_{\frac{1}{3}}^1 x(t)\,dt$,
14. $f(x) = x\left(\frac{1}{2}\right) + \int_0^1 x(t)\,dt$,
15. $f(x) = x\left(\frac{1}{2}\right) + 5\int_0^1 x(t)\,dt$,
16. $f(x) = \int_0^1 x(t)\cos(\pi t)\,dt$,
17. $f(x) = \int_0^1 tx(t)\,dt$,
18. $f(x) = 4\int_0^1 t^2 x(t)\,dt$.

Zad. 12. Oblicz normy funkcjonałów z poprzedniego zadania (korzystając z ich reprezentacji).

Zad. 13. Korzystając z Twierdzenia o dualności, znajdź $u \in U$, takie że $\|x - u\| \to \min$, gdy

1. $X = \mathbb{R}^2$ z normą l^2, $x = (1,3)$, $U = \{\left(a, \frac{1}{2}a\right),\ a \in \mathbb{R}\} \subset X$;
2. $X = \mathbb{R}^2$ z normą l^2, $x = (2,1)$, $U = \{(-a, 3a),\ a \in \mathbb{R}\} \subset X$;
3. $X = \mathbb{R}^2$ z normą l^4, $x = (1,2)$, $U = \{(a, a),\ a \in \mathbb{R}\} \subset X$;
4. $X = \mathbb{R}^2$ z normą l^4, $x = (4,1)$, $U = \{(a, -8a),\ a \in \mathbb{R}\} \subset X$.

W każdym przypadku sprawdź współliniowość odpowiednich elementów.

Odp.

1. $u_0 = (2,1)$, $x_0^*(v) = -\frac{1}{\sqrt{5}}v_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}v_2$,
2. $u_0 = \left(-\frac{1}{10}, \frac{3}{10}\right)$, $x_0^*(v) = \frac{3}{\sqrt{10}}v_1 + \frac{1}{\sqrt{10}}v_2$,
3. $u_0 = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $x_0^*(v) = 0$,
4. $u_0 = \left(\frac{2}{17}, -\frac{16}{17}\right)$, $x_0^*(v) = \left(\frac{16}{17}\right)^{3/4} v_1 + \left(\frac{1}{17}\right)^{3/4} v_2$.