Zadanie 28. Niech U, U_1 będą podprzestrzeniami V i niech $x_0 \in V$. Udowodnij:

1. $x_0 + U = x_1 + U_1 \Leftrightarrow U = U_1$ i $x_0 - x_1 \in U$.
2. $x_0 + U$ jest podprzestrzenią liniową $V \Leftrightarrow x_0 \in U$ (wtedy $x_0 + U = U$).
3. $M = x_0 + U$ jest podprzestrzenią liniową $V \Leftrightarrow 0 \in M$ (wtedy $M = U$).
4. $M = x_0 + U$, wtedy $\{\{M\}\} = \{\alpha x_0 + u : u \in U, \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\{x_0\}\} + U$.
5. Jeżeli $U \subsetneq U_1$, to $x_0 + U \subsetneq U_1$.
6. $M = x_0 + U$ domknięta $\Leftrightarrow U$ domknięta (V unormowana).

Zadanie 29. Udowodnij:

1. Niech $x_0 \notin U$. Rozmaitość $x_0 + U$ jest hiperpłaszczyzną $\Leftrightarrow \{\{x_0 + U\}\} = V$.
2. $x_0 + U$ jest hiperpłaszczyzną w $V \Leftrightarrow U$ jest największą podprzestrzenią właściwą V (jest kowymiaru 1).

Zadanie 30. Czy zbiór $H = \{x \in C([0,1]) : x(0) = 1, x(1) = -1\}$ jest rozmaitością, hiperpłaszczyzną w $C([0,1])$?

Zadanie 31. Niech $K \subset V$ będzie zbiorem wypukłym, $0 \in \mathrm{Int}K$, $p : V \to \mathbb{R}_+$. Funkcjonał Minkowskiego dany jest wzorem

$$p(x) = \inf\left\{r :\ r > 0,\ \frac{1}{r}x \in K\right\}.$$

Udowodnij następujące własności:

1. $0 \leq p(x) < \infty$
2. $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ dla $\alpha > 0$
3. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$
4. p jest ciągły
5. $\bar{K} = \{x :\ p(x) \leq 1\}, \quad \mathrm{Int}K = \{x : p(x) < 1\}$

Zadanie 32. Wyznacz funkcjonał Minkowskiego podanych podzbiorów $M \subset \mathbb{R}^2$:

1. $M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 :\ x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$.
2. $M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 :\ x_1^2 \leq 1\}$.
3. $M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 :\ x_1^2 + x_2^2 \leq 4\}$.
4. $M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 :\ ax_1 - b \leq x_2 \leq ax_1 + b,\ a, b \in \mathbb{R}, b > 0\}$.