

**Zadanie 33.** Dany jest funkcjonal  $f : L^2([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \int_0^1 t \left( \int_0^t x(s) ds \right) dt.$$

1. Oblicz  $f(x)$ , gdy a)  $x \equiv 1$ , b)  $x(t) = t$ .
2. Wykaż liniowość i ograniczoność  $f$ .
3. Znajdź  $y \in L^2([0, 1])$ , taki że  $f(x) = \langle x, y \rangle$ .
4. Oblicz normę  $f$ .

**Zadanie 34.** Dany jest operator  $A : L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$

$$A(x)(t) = \int_0^1 K(t, s)x(s)ds, \quad \text{gdzie} \quad \int_0^1 \int_0^1 |K(t, s)|^2 dt ds < \infty.$$

1. Oblicz  $A(x)$ , gdy  $K(t, s) = e^{ts}$  i  $x(t) = t$ .
2. Wykaż liniowość i ograniczoność  $A$ .
3. Oblicz normę  $A$ ,
4. Znajdź  $A^*$ . Kiedy  $A$  jest samosprężony ( $A = A^*$ )?

**Zadanie 35.** Dany jest operator  $A : l^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$i) A(x) = x_1, \quad ii) A(x) = x_1 + 3x_3, \quad x = (x_1, x_2, \dots)$$

1. Wykaż liniowość i ograniczoność  $A$ .
2. Oblicz normę  $A$ .
3. Znajdź  $y \in l^2$ , taki że  $A(x) = \langle x, y \rangle$ .
4. Znajdź  $A^*$ .

**Zadanie 36.** Dany jest operator  $A : l^2 \rightarrow l^2$

$$A(x) = (x_2, x_3, \dots), \quad x = (x_1, x_2, \dots).$$

1. Wykaż liniowość i ograniczoność  $A$ .
2. Oblicz normę  $A$ .
3. Znajdź  $A^*$ . Czy  $A$  jest samosprężony?

**Zadanie 37.** Dany jest operator  $A : l^2 \rightarrow l^2$

$$i) A(x) = (x_2, x_1, x_3, x_4 \dots), \quad x = (x_1, x_2, \dots),$$

$$ii) A(x) = (2x_1 - x_2, x_3 \dots), \quad x = (x_1, x_2, \dots).$$

1. Wykaż liniowość i ograniczoność  $A$ .
2. Oblicz normę  $A$ .
3. Znajdź  $A^*$ . Czy  $A$  jest samosprężony?

**Zadanie 38.** Niech  $V$  - przestrzeń unitarna,  $y \in V$ . Dany jest funkcjonal

$$f : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \langle x, y \rangle.$$

1. Wykaż liniowość i ograniczoność  $f$ .
2. Oblicz normę  $f$ .
3. Znajdź  $f^*$ .