Przykład 1. Znajdziemy wielomian stopnia 0 optymalny w sensie normy L^2 dla funkcji $f(t) = \sqrt{t}$, $t \in [0,1]$.
Szukamy $u(t) = a$, $a \in \mathbb{R}$ takiego, że $\|u - f\|_{L^2} \to \min$. Mamy

$$\|u - f\|_{L^2}^2 = \int_0^1 \left(a - \sqrt{t}\right)^2 dt = a^2 - \frac{4}{3}a + \frac{1}{2} =: g(a).$$

Warunek konieczny istnienia ekstremum: $g'(a) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2a - \frac{4}{3} = 0 \;\Leftrightarrow\; a = \frac{2}{3}$.
Ponieważ $g''(a) = 2 > 0$, funkcja g ma w $a = \frac{2}{3}$ minimum o wartości $g(\frac{2}{3}) = \frac{1}{18}$. Stąd $u(t) = \frac{2}{3}$ oraz $\|u - f\|_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{18}}$.

Zadanie 1. Znajdź wielomian stopnia 0 optymalny w sensie normy L^2 dla funkcji $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

1. $f(t) = \dfrac{1}{1+t}$ *Odp.* $u(t) = \ln 2$.
2. $f(t) = \sin t$ *Odp.* $u(t) = 1 - \cos 1$.

Przykład 2. Znajdziemy wielomian stopnia co najwyżej 1 optymalny w sensie normy L^2 dla funkcji $f(t) = t^2$, $t \in [0,1]$.
Szukamy zatem $u(t) = a + bt$, $a, b \in \mathbb{R}$ takiego, że $\|u - f\|_{L^2} \to \min$.
Sposób 1.

$$\|u - f\|_{L^2}^2 = \int_0^1 \left(a + bt - t^2\right)^2 dt = a^2 + \frac{1}{3}b^2 + ab - \frac{2}{3}a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{5} \;\; =: g(a,b).$$

Gradient funkcji g: $\Delta g = [g_a,\ g_b] = \left[2a + b - \frac{2}{3},\ a + \frac{2}{3}b - \frac{1}{2}\right]$.
Punkt stacjonarny: $\Delta g = 0 \;\Leftrightarrow\; a = -\frac{1}{6},\ b = 1$. Macierz Hessego: $H = \begin{bmatrix} g_{aa} & g_{ab} \\ g_{ba} & g_{bb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$.
Hesjan: $\det H = \frac{1}{3}$. Ponieważ $\det H > 0$, funkcja g ma w punkcie $(-\frac{1}{6}, 1)$ ekstremum.
Ponieważ $g_{aa} > 0$, w punkcie $(-\frac{1}{6}, 1)$ funkcja g ma minimum o wartości $g(-\frac{1}{6}, 1) = \frac{1}{180}$.
Zatem $u(t) = a + bt = -\frac{1}{6} + t$ oraz $\|u - f\|_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{180}}$.
Sposób 2.
Baza przestrzeni wielomianów stopnia co najwyżej 1: $\{1, t\}$. Niech $u_1(t) = 1$, $u_2(t) = t$.
Ponieważ w L^2 mamy $\langle u_1, u_1\rangle = \int_0^1 1\, dt = 1$, $\langle u_1, u_2\rangle = \langle u_2, u_1\rangle = \int_0^1 t\, dt = \frac{1}{2}$, $\langle u_2, u_2\rangle = \int_0^1 t^2\, dt = \frac{1}{3}$,
macierz Grama jest postaci $G = \begin{bmatrix} \langle u_1, u_1\rangle & \langle u_1, u_2\rangle \\ \langle u_2, u_1\rangle & \langle u_2, u_2\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.
Ponieważ $\langle f, u_1\rangle = \int_0^1 t^2\, dt = \frac{1}{3}$, $\langle f, u_2\rangle = \int_0^1 t^3\, dt = \frac{1}{4}$, mamy $b = \begin{bmatrix} \langle f, u_1\rangle \\ \langle f, u_2\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$.
Równania normalne $G\xi = b \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$, skąd $\xi_1 = -\frac{1}{6}$, $\xi_2 = 1$ oraz $u(t) = \xi_1 + \xi_2 t = -\frac{1}{6} + t$.

Zadanie 2. Znajdź wielomian stopnia co najwyżej 1 optymalny w sensie normy L^2 dla funkcji $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

1. $f(t) = t^3$ *Odp.* $u(t) = \frac{9}{10}t - \frac{1}{5}$.
2. $f(t) = \sqrt{t}$ *Odp.* $u(t) = \frac{4}{5}t + \frac{4}{15}$.

Zadanie 3. Znajdź wielomian stopnia co najwyżej 2 optymalny w sensie normy L^2 dla funkcji $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

1. $f(t) = t^3$ *Odp.* $u(t) = \frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{5}t + \frac{1}{20}$,
2. $f(t) = \sqrt{t}$ *Odp.* $u(t) = -\frac{4}{7}t^2 + \frac{48}{35}t + \frac{6}{35}$.

Zadanie 4. Znajdź wielomian stopnia 0 optymalny w sensie normy L^4 dla funkcji $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(t) = t$.
Odp. $u(t) = \frac{1}{2}$.

Przykład 3. Znajdziemy wielomian stopnia 0 optymalny w sensie normy L^∞ dla funkcji $f(t) = \dfrac{t}{1+t}$.
Szukamy zatem $u(t) = a$, $a \in \mathbb{R}$ takiego, że $\|u - f\|_{L^\infty} \to \min$. Mamy

$$\|u - f\|^2_{L^\infty} = \sup_{t\in[0,1]} \left| \frac{t}{1+t} - a \right|.$$

Ponieważ $g'(t) = \left(\frac{t}{1+t} - a\right)' = \frac{1}{(1+t)^2}$, to g' nie ma miejsc zerowych, a zatem g nie posiada ekstremów.
Obliczamy jej wartość na krańcach przedziału $[0,1]$: $g(0) = -a$, $g(1) = \frac{1}{2} - a$. Wtedy

$$\|u - f\|^2_{L^\infty} = \max \left\{ |a|, \left| \frac{1}{2} - a \right| \right\} \to \min.$$

Stąd $a = \frac{1}{4}$ oraz $u(t) = \frac{1}{4}$.

Zadanie 5. Znajdź wielomian stopnia 0 optymalny w sensie normy L^∞ dla funkcji $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

1. $f(t) = \sqrt{t}$ *Odp.* $u(t) = \frac{1}{2}$,
2. $f(t) = \sin t$ *Odp.* $u(t) = \frac{1}{2}\sin 1$.

Przykład 4. Niech V będzie przestrzenią unormowaną. Normę funkcjonału $f : V \to \mathbb{R}$ definiujemy

$$\|f\| = \inf\{m > 0 : \forall_{x\in V}\ |f(x)| \le m\|x\|\}.$$

Wykażemy, że

$$\|f\| = \sup_{x\in V\setminus\{0\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|\le 1} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

Krok 1. Ponieważ $\{x \in V : \|x\| = 1\} \subseteq \{x \in V : \|x\| \le 1\} \subseteq V$, mamy

$$\sup_{\|x\|=1} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \le \sup_{\|x\|\le 1} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \le \sup_{x\in V\setminus\{0\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

Krok 2. Należy wykazać $\displaystyle\sup_{\|x\|=1} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{x\in V\setminus\{0\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$.

Krok 3. Należy wykazać $\displaystyle\sup_{x\in V\setminus\{0\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \inf\{m > 0 : \forall_{x\in V}\ |f(x)| \le m\|x\|\}$.

Przykład 5. Obliczymy z definicji normę funkcjonału $f \in (C[0,1])^*$ danego wzorem $f(x) = \displaystyle\int_0^1 tx(t)\,dt$. Mamy

$$|f(x)| = \left| \int_0^1 tx(t)\,dt \right| \le \int_0^1 |tx(t)|\,dt = \int_0^1 t|x(t)|\,dt \le \int_0^1 t \sup_{t\in[0,1]} |x(t)|\,dt = \int_0^1 t\|x\|\,dt = \|x\| \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}\|x\|.$$

Zatem

$$\|f\| = \sup_{\|x\|\le 1} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \le \sup_{\|x\|\le 1} \frac{\frac{1}{2}\|x\|}{\|x\|} = \frac{1}{2}.$$

Zadanie 6. Oblicz z definicji normę funkcjonału $f \in (C[0,1])^*$, gdy

1. $f(x) = 5x(t)$,
2. $f(x) = x(1) - x(0)$, *Odp.* $\|f\| = 2$
3. $f(x) = x\left(\frac{1}{2}\right) + 2\displaystyle\int_0^1 x(t)\,dt$, *Odp.* $\|f\| = 3$
4. $f(x) = x(1) - \displaystyle\int_0^1 x(t)\,dt$ *Odp.* $\|f\| = 2$

Przykład 6. Dla $f \in (C[0,1])^*$ znajdziemy funkcję v o wahaniu skończonym na $[0,1]$ taką, że $f(x) = \int_0^1 x(t)\,dv(t)$.

Dla funkcjonału $f(x) = x\left(\frac{1}{2}\right) + \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{7}{8}} x(t)\,dt$ mamy $v(t) = \begin{cases} 0, & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ 1, & t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \\ t + \frac{1}{4}, & t \in \left[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right) \\ \frac{9}{8}, & t \in \left[\frac{7}{8}, 1\right] \end{cases}$,

gdyż

$$\begin{aligned} \int_0^1 x(t)\,dv(t) &= \int_0^{\frac{1}{2}} x(t)\cdot 0'\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} x(t)\cdot 1'\,dt + \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{7}{8}} x(t)\left(t+\frac{1}{4}\right)'\,dt + \int_{\frac{7}{8}}^{1} x(t)\cdot\left(\frac{9}{8}\right)'\,dt \\ &\quad + x\left(\frac{1}{2}\right)\left[v\left(\frac{1}{2}+\right) - v\left(\frac{1}{2}-\right)\right] + x\left(\frac{3}{4}\right)\left[v\left(\frac{3}{4}+\right) - v\left(\frac{3}{4}-\right)\right] + x\left(\frac{7}{8}\right)\left[v\left(\frac{7}{8}+\right) - v\left(\frac{7}{8}-\right)\right] \\ &= \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{7}{8}} x(t)\,dt + x\left(\frac{1}{2}\right)[1-0] + x\left(\frac{3}{4}\right)\left[\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)-1\right] + x\left(\frac{7}{8}\right)\left[\frac{9}{8} - \left(\frac{7}{8}+\frac{1}{4}\right)\right] \\ &= \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{7}{8}} x(t)\,dt + x\left(\frac{1}{2}\right) = f(x). \end{aligned}$$

Zadanie 7. Dla danego funkcjonału $f \in (C[0,1])^*$ pokaż, że podana funkcja $v \in BV([0,1])$ spełnia $f(x) = \int_0^1 x(t)\,dv(t)$.

1. $f(x) = \frac{3}{4}x\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4}x\left(\frac{1}{2}\right)$, $\quad v(t) = \begin{cases} 0, & t \in \left[0, \frac{1}{3}\right) \\ \frac{3}{4}, & t \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \\ \frac{1}{2}, & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$
2. $f(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} x(t)\,dt$, $\quad v(t) = \begin{cases} 0, & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ t - \frac{1}{2}, & t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) \\ \frac{1}{6}, & t \in \left[\frac{2}{3}, 1\right] \end{cases}$
3. $f(x) = x(0) - \frac{1}{2}\int_0^1 x(t)\,dt$, $\quad v(t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ 1 - \frac{1}{2}t, & t \in (0,1] \end{cases}$
4. $f(x) = x\left(\frac{3}{4}\right) + \int_{\frac{1}{3}}^{1} x(t)\,dt$, $\quad v(t) = \begin{cases} 0, & t \in \left[0, \frac{1}{3}\right) \\ t - \frac{1}{3}, & t \in \left[\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right) \\ t + \frac{2}{3}, & t \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \end{cases}$
5. $f(x) = 2x(1) - x(0) + \int_0^1 t x(t)\,dt$, $\quad v(t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ \frac{1}{2}t^2 - 1, & t \in (0,1) \\ \frac{3}{2}, & t = 1 \end{cases}$

Zadanie 8. Dla danego funkcjonału $f \in (C[0,1])^*$ znajdź funkcję $v \in BV([0,1])$ taką, że $f(x) = \int_0^1 x(t)\,dv(t)$.

1. $f(x) = x\left(\frac{1}{2}\right)$
2. $f(x) = x(0)$
3. $f(x) = x(1)$
4. $f(x) = x(0) - x(1)$
5. $f(x) = x(0) + 3x\left(\frac{1}{2}\right) - x(1)$
6. $f(x) = \int_0^1 x(t)\,dt$
7. $f(x) = x\left(\frac{1}{2}\right) + \int_{\frac{1}{2}}^1 x(t)\,dt$
8. $f(x) = x\left(\frac{1}{2}\right) + 5\int_0^1 x(t)\,dt$
9. $f(x) = \int_0^1 x(t)\cos(\pi t)\,dt$
10. $f(x) = 4\int_0^1 t^2 x(t)\,dt$

Uwaga. Reprezentacja nie jest jednoznaczna na $BV[0,1]$; jest jednoznaczna na $NBV[0,1]$.
Mamy $v \in NBV[0,1] \;\Leftrightarrow\; (v(0) = 0$ i v - prawostronnie ciągła).

Norma funkcjonału. Jeżeli $v \in NBV[0,1]$, to $||f|| = ||v|| = TV_0^1(v)$, gdzie $TV_a^b(v)$ - wahanie funkcji v na przedziale $[a,b]$. Jeżeli v jest funkcją monotoniczną na $[a,b]$, to $TV_a^b(v) = |v(b) - v(a)|$.

Przykład 7. Funkcja $v(t) = \begin{cases} 0, & t \in \left[0, \frac{1}{3}\right) \\ \frac{3}{4}, & t \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \\ \frac{1}{2}, & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$ jest monotoniczna na przedziałach, zatem

$TV_0^1(v) = TV_0^{\frac{1}{3}}(v) + TV_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}(v) + TV_{\frac{1}{2}}^1(v) = \left|v(\frac{1}{3}) - v(0)\right| + \left|v(\frac{1}{2}) - v(\frac{1}{3})\right| + \left|v(\frac{1}{2}) - v(1)\right| = \left|\frac{3}{4} - 0\right| + \left|\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right| + \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right| = 1.$

Zadanie 9. Oblicz normy funkcjonałów z zadań 7 i 8, korzystając z reprezentacji.

Przykład 8. a) Korzystając z Twierdzenia o dualności, znajdziemy $u \in U$, takie że $\|x - u\| \to \min$, gdy $X = \mathbb{R}^2$ z normą l^2, $x = (1,3)$, $U = \left\{\left(a, \frac{1}{2}a\right), \ a \in \mathbb{R}\right\} \subset X$.

Twierdzenie. *Niech X będzie przestrzenią rzeczywistą, liniową i unormowaną, $x \in X$, $U \subset X$. Wtedy*

$$\inf_{u \in U} ||x - u|| = \max_{||x^*|| \leq 1, \ x^* \in U^\perp} x^*(x),$$

gdzie maksimum jest realizowane dla pewnego $x_0^* \in U^\perp$.
Ponadto, jeżeli infimum jest realizowane dla pewnego $u_0 \in U$, to element x_0^* jest współliniowy z elementem $x - u_0$.

Zadanie pierwotne. $\|x - u\| = \sqrt{(1-a)^2 + (3 - \frac{1}{2}a)^2} \to \min$.
Niech $f(a) = (1-a)^2 + (3 - \frac{1}{2}a)^2$. Wtedy $f'(a) = \frac{5}{2}a - 5$ oraz $f'(a) = 0$ dla $a = 2$, $f''(a) = \frac{5}{2} > 0$.
Zatem $u_0 = \left(a, \frac{1}{2}a\right) = (2,1)$.

Zadanie dualne. Szukany funkcjonał x^* ma spełniać $x^* \in U^\perp$, tzn. $x^*(u) = 0$ dla każdego $u \in U$.
Ponieważ przestrzenią dualną do l^2 jest l^2, to (z Tw. Riesza dla przestrzeni Hilberta) dla tego x^* mamy

$$\exists_{y \in X} \ \forall_{w \in X} \ x^*(w) = \langle w, y \rangle \quad \text{oraz} \quad ||x^*|| = ||y||.$$

Zatem dla $u \in U \subset X$ mamy

$$0 = x^*(u) = \langle u, y \rangle = \left\langle (a, \frac{1}{2}a), (y_1, y_2) \right\rangle = ay_1 + \frac{1}{2}ay_2.$$

Stąd $y_2 = -2y_1$ i $y = (b, -2b)$, $b \in \mathbb{R}$.

Kolejny warunek $||x^*|| \leq 1$ oznacza $\sqrt{y_1^2 + y_2^2} \leq 1$, czyli $y_1^2 + y_2^2 \leq 1$. Wstawiając $y = (b, -2b)$, mamy $5b^2 \leq 1$ i $b \in \left[-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right]$.

Mamy jeszcze $x^*(x) = \langle x, y \rangle = \langle (1,3), (b, -2b) \rangle = -5b \to max$, a zatem $b \to min$, co razem z $b \in \left[-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right]$ daje $b = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Zatem $y_0 = (b, -2b) = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ i funkcjonał maksymalizujący dany jest wzorem $x_0^*(v) = \langle v, y_0 \rangle = -\frac{1}{\sqrt{5}}v_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}v_2$, $v \in X$.
Współliniowość. Sprawdzimy, czy zachodzi $x_0^*(x - u_0) = ||x_0^*|| \cdot ||x - u_0||$, tzn. czy $\langle y_0, x - u_0 \rangle = ||y_0|| \cdot ||x - u_0||$,
gdzie $|| \cdot ||$ oznacza normę l^2. Ponieważ $y_0 = (-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$, $x = (1,3)$, $u_0 = (2,1)$, $x - u_0 = (-1, 2)$, to:
Lewa $= \langle y_0, x - u_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} = 1 \cdot \sqrt{5} = ||y_0|| \cdot ||x - u_0|| =$Prawa.

b) Rozpatrzmy inny przypadek: $X = \mathbb{R}^2$ z normą l^4, $x = (1,2)$, $U = \{(a,a), \ a \in \mathbb{R}\} \subset X$.

Zadanie pierwotne. $\|x - u\|_4 = \left((1-a)^4 + (2-a)^4\right)^{\frac{1}{4}} \to \min$.
Niech $f(a) = (1-a)^4 + (2-a)^4$. Wtedy $0 = f'(a) = 2a^3 - 9a^2 + 15a - 9 = (2a-3)(a^2 - 3a + 3)$, $f''(a) > 0$, stąd $a = \frac{3}{2}$.

Zadanie dualne. Z Twierdzenia o reprezentacji funkcjonału na l^p: istnieje $y \in l^q$ że dla każdego $v \in l^p$ $x^*(v) = v_1y_1 + v_2y_2$.
W naszym przypadku $p = 4$, $q = \frac{4}{3}$.
Mamy warunki

1) $0 = x^*(u) = ay_1 + ay_2$, stąd $y = (-b, b)$,
2) $||x^*||_4 = ||y||_{\frac{4}{3}} \leq 1$, stąd $y_1^{\frac{4}{3}} + y_2^{\frac{4}{3}} \leq 1$,
3) $x^*(x) = x_1y_1 + x_2y_2 = y_1 + 2y_2 \to \max$.

Z 1) i 2) otrzymujemy $b \in \left[-\frac{1}{\sqrt[4]{8}}, \frac{1}{\sqrt[4]{8}}\right]$, a z 3) mamy $b \to \max$, zatem $b = \frac{1}{\sqrt[4]{8}}$ i dalej tak, jak w poprzednim przykładzie.

Zadanie 10. Korzystając z Twierdzenia o dualności, znajdź $u \in U$, takie że $\|x - u\| \to \min$, gdy

1. $X = \mathbb{R}^2$ z normą l^2, $x = (2, 1)$, $U = \{(-a, 3a),\ a \in \mathbb{R}\} \subset X$; *Odp.* $u_0 = \left(-\frac{1}{10}, \frac{3}{10}\right)$, $x_0^*(v) = \frac{3}{\sqrt{10}} v_1 + \frac{1}{\sqrt{10}} v_2$,
2. $X = \mathbb{R}^2$ z normą l^4, $x = (4, 1)$, $U = \{(a, -8a),\ a \in \mathbb{R}\} \subset X$. *Odp.* $u_0 = \left(\frac{2}{17}, -\frac{16}{17}\right)$, $x_0^*(v) = \left(\frac{16}{17}\right)^{3/4} v_1 + \left(\frac{1}{17}\right)^{3/4} v_2$.

W każdym przypadku sprawdź współliniowość odpowiednich elementów.

Przykład 9. (*Warunek Haara*)
Niech $U = \{\{1, t, t^2\}\} = \operatorname{span}\{1, t, t^2\} = \{u(t) = a + bt + ct^2 :\ a, b, c \in \mathbb{R}\}$.
Sprawdzimy, czy U spełnia warunek Haara na $[0, 1]$.

Mamy $n = \dim U = 3$, $u_1(t) = 1$, $u_2(t) = t$, $u_3(t) = t^2$. Niech t_1, t_2, $t_3 \in [0, 1]$, takie że $t_1 \neq t_2 \neq t_3$.
Obliczamy wyznacznik

$$\begin{aligned}
\Delta = \begin{vmatrix} u_1(t_1) & u_2(t_1) & u_3(t_1) \\ u_1(t_2) & u_2(t_2) & u_3(t_2) \\ u_1(t_3) & u_2(t_3) & u_3(t_3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ 1 & t_3 & t_3^2 \end{vmatrix} &= t_2 t_3^2 - t_1 t_3^2 + t_3 t_1^2 - t_3 t_2^2 + t_1 t_2^2 - t_2 t_1^2 \\
&= t_3^2(t_2 - t_1) + t_3(t_1^2 - t_2^2) + t_1 t_2 (t_2 - t_1) \\
&= (t_2 - t_1)[t_3(t_3 - t_2) - t_1(t_3 - t_2)] \\
&= (t_2 - t_1)(t_3 - t_2)(t_3 - t_1).
\end{aligned}$$

Mamy $\Delta \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (t_2 - t_1)(t_3 - t_2)(t_3 - t_1) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_1 \neq t_2 \quad \wedge \quad t_2 \neq t_3 \quad \wedge \quad t_1 \neq t_3$, co jest prawdą z założeń. Zatem udowodniliśmy, że U spełnia warunek Haara.

Zadanie 11. Pokaż, że $U = \{\{1, t^2, t^4\}\}$ spełnia warunek Haara na $[0, 1]$, ale nie spełnia warunku Haara na $[-1, 1]$.
Aby pokazać, że U nie spełnia warunku Haara, wystarczy znaleźć punkty $t_1 \neq t_2 \neq t_3$ przedziału $[-1, 1]$, takie że $\Delta = 0$.

Zadanie 12. Pokaż, że $U = \{\{\sin t, \cos t\}\}$ spełnia warunek Haara na $[a, b] \subset (k\pi,\ (k + 1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Zadanie 13. Pokaż, że $U = \{\{1, \sin t, \cos t\}\}$ spełnia warunek Haara na $[a, b]$, o ile $0 < b - a < 2\pi$.

Zadanie 14. Pokaż, że $U = \{\{1, \cos t, \cos 2t\}\}$ spełnia warunek Haara na $[0, \pi]$.

Przykład 10. (*Wielomiany Czebyszewa*)
Niech $v(t) = t^3$, $t \in [-1, 1]$. Znajdziemy wielomian $u \in U = \{\{1, t, t^2\}\}$ najbliższy w sensie normy supremum do funkcji v, korzystając z wielomianów Czebyszewa.

Dla funkcji t^n wielomianem optymalnym $u \in U = \{\{1, t, t^2, \ldots, t^{n-1}\}\}$ jest

$$u(t) = t^n - \frac{1}{2^{n-1}} T_n(t),$$

gdzie T_n oznacza n-ty wielomian Czebyszewa

$$\begin{aligned}
T_0(t) &= 1, \\
T_1(t) &= t, \\
T_n(t) &= 2t\, T_{n-1}(t) - T_{n-2}(t).
\end{aligned}$$

Mamy $u(t) = t^3 - \frac{1}{2^{3-1}} T_3(t) = t^3 - \frac{1}{4}(4t^3 - 3t) = \frac{3}{4} t$.

Zadanie 15. Niech $v(t) = t^5$, $t \in [-1, 1]$. Korzystając z wielomianów Czebyszewa, znajdź wielomian $u \in U = \{\{1, t, t^2, t^3, t^4\}\}$ najbliższy w sensie normy supremum do v.

Przykład 11. (*Twierdzenie Czebyszewa o alternansie*)
Niech $v(t) = t^2$, $t \in [0,1]$. Znajdziemy wielomian u stopnia ≤ 1 najbliższy w sensie normy supremum do v.

Oznaczamy $U = \{\{1, t\}\} = \{u(t) = a + bt : \ a, b \in \mathbb{R}\}$. Zauważmy, że U spełnia warunek Haara.
Z Twierdzenia Czebyszewa o alternansie istnieją $n+1 = 2+1 = 3$ punkty $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 \leq 1$, takie że

$$\begin{aligned} v(t_i) - u(t_i) &= (-1)^i \, z \, \|v - u\|, \quad i = 1,2,3, \ z - \text{ustalone}, \ z = 1 \text{ lub } z = -1 \\ t_i^2 - (a + bt_i) &= (-1)^i \, z \, \|v - u\|, \quad i = 1,2,3, \ z - \text{ustalone}, \ z = 1 \text{ lub } z = -1. \end{aligned} \tag{1}$$

Wybierzmy $z = 1$. Ponieważ $v(t) = t^2$ jest wypukła, to $t_1 = 0$, $t_3 = 1$ i trzeciego punktu szukamy, obliczając

$$0 = (t^2 - (a + bt))' = 2t - b \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{1}{2}b \ \text{ oraz } \ \frac{1}{2}b \in (0,1), \quad \text{tzn. } b \in (0,2).$$

Podstawiamy $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{1}{2}b$, $t_3 = 1$ do (1):

$$\begin{aligned} 0 - (a + b \cdot 0) &= (-1)^1 \cdot 1 \cdot \|v - u\|, \\ \left(\frac{1}{2}b\right)^2 - \left(a + b \cdot \frac{1}{2}b\right) &= (-1)^2 \cdot 1 \cdot \|v - u\|, \\ 1 - (a + b \cdot 1) &= (-1)^3 \cdot 1 \cdot \|v - u\|. \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} -a &= -\|v - u\|, \\ -\frac{1}{4}b^2 - a &= \|v - u\|, \\ 1 - a - b &= -\|v - u\|. \end{aligned}$$

Zatem lewe strony, po ewentualnej zmianie znaku, są sobie równe: $a = -\frac{1}{4}b^2 - a = -(1 - a - b)$.

Rozwiązujemy $a = -\frac{1}{4}b^2 - a$ i $a = -1 + a + b$.

Otrzymujemy $a = -\frac{1}{8}$, $b = 1$, więc wielomianem optymalnym jest $u(t) = a + bt = -\frac{1}{8} + t$.

Zadanie 16. Jaki będzie wielomian optymalny, jeżeli w przykładzie 11 zmienimy przedział $[0,1]$ na

1. $[-1, 1]$ *Odp.* $u(t) = \frac{1}{2}$
2. $[0, 2]$ *Odp.* $u(t) = -\frac{1}{2} + 2t$

Zadanie 17. Niech $v(t) = t^4$, $t \in [0,1]$. Znajdź wielomian u stopnia ≤ 1 najbliższy w sensie normy supremum do v.

Przykład 12. (*Algorytm Remeza*)
Znajdziemy wielomian stopnia co najwyżej 1 na $[0,1]$ najbliższy w sensie normy supremum do funkcji $v(t) = \dfrac{1}{1+t}$.
Zauważmy, że $U = \{\{1, t\}\} = \{u(t) = a + bt : \ a, b \in \mathbb{R}\}$ spełnia warunek Haara.
1. Przyjmijmy, że pierwszym przybliżeniem alternansu są punkty $0, \ \frac{1}{2}, \ 1$.
Warunek alternansu: $u(t_i) - (-1)^i \, \varepsilon = v(t_i)$, $i = 1,2,3$.
Podstawiając $t_1 = 0, t_2 = \frac{1}{2}, t_3 = 1$, mamy układ $\begin{cases} a + \varepsilon & = 1 \\ a + \frac{1}{2}b - \varepsilon & = \frac{2}{3} \\ a + b + \varepsilon & = \frac{1}{2} \end{cases}$, którego rozwiązaniem jest $a = \frac{23}{24}$, $b = -\frac{1}{2}$, $\varepsilon = \frac{1}{24}$.
Stąd $u(t) = a + bt = \frac{23}{24} - \frac{1}{2}t$. Sprawdzimy, czy u jest wielomianem optymalnym, tzn. czy $\max\limits_{t \in [0,1]} |r(t)| = \varepsilon$, gdzie $r(t) = v(t) - u(t)$.
Wyznaczamy $r(t) = v(t) - u(t) = \dfrac{1}{1+t} - \dfrac{23}{24} + \dfrac{1}{2}t$.
Na $[0,1]$ rozwiązujemy $r'(t) = 0 \ \Leftrightarrow \ t = \sqrt{2} - 1$.
Mamy $\max\limits_{t \in [0,1]} |r(t)| = |r(\sqrt{2} - 1)| = \left|\sqrt{2} - \dfrac{35}{24}\right| = 0.048 \neq \dfrac{1}{24} = \varepsilon$. Zatem $u(t) = \dfrac{23}{24} - \dfrac{1}{2}t$ nie jest wielomianem optymalnym.

2. Drugim przybliżeniem alternansu są więc punkty $0,\ \sqrt{2}-1,\ 1.$

Podstawiając je do warunku alternansu, mamy $\begin{cases} a+\varepsilon & = & 1 \\ a+(\sqrt{2}-1)b-\varepsilon & = & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ a+b+\varepsilon & = & \frac{1}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a & = & \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{4} \\ b & = & -\frac{1}{2} \\ \varepsilon & = & \frac{3}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

Stąd $u(t)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}t,\quad r(t)=\dfrac{1}{1+t}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}t,\quad r'(t)=0 \ \Leftrightarrow\ t=\sqrt{2}-1\in[0,1].$

Mamy $\max\limits_{t\in[0,1]}|r(t)|=|r(\sqrt{2}-1)|=\left|\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{3}{4}\right|=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\varepsilon.$

Zatem $u(t)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}t$ jest poszukiwanym wielomianem optymalnym.

Zadanie 18.
Korzystając z algorytmu Remeza, znajdź wielomian stopnia co najwyżej 1 na $[0,1]$ najbliższy w sensie normy supremum do funkcji e^t. Niech pierwszym przybliżeniem alternansu będą punkty $0,\ \dfrac{1}{2},\ 1.$ *Odp.* $u(t)=\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}(e-1)\ln(e-1)+(e-1)t$

Przykład 13. *(Splajny stopnia 1)*
Dana jest funkcja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ i podział $a=t_0<t_1<\ldots<t_{n-1}<t_n=b$. Splajn (funkcja sklejana) stopnia 1 jest funkcją kawałkami liniową postaci

$$S(t)=\begin{cases} S_1(t)=a_1+b_1t, & t\in[t_0,t_1), \\ S_2(t)=a_2+b_2t, & t\in[t_1,t_2), \\ \vdots \\ S_n(t)=a_n+b_nt, & t\in[t_{n-1},t_n]. \end{cases}$$

Niech dane będą $f_i=f(t_i)$ dla $i=0,1,\ldots,n$. Wtedy na podprzedziale $[t_i,t_{i+1}]$ dla $i=0,1,\ldots,n-1$ mamy

$$S_i(t)=f_i+\frac{f_{i+1}-f_i}{t_{i+1}-t_i}(t-t_i).$$

Równoważnie

$$S(t)=\begin{cases} S_1(t)=f_0\frac{t-t_1}{t_0-t_1}+f_1\frac{t-t_0}{t_1-t_0}, & t\in[t_0,t_1], \\ S_2(t)=f_1\frac{t-t_2}{t_1-t_2}+f_2\frac{t-t_1}{t_2-t_1}, & t\in[t_1,t_2], \\ \vdots \\ S_n(t)=f_{n-1}\frac{t-t_n}{t_{n-1}-t_n}+f_n\frac{t-t_{n-1}}{t_n-t_{n-1}}, & t\in[t_{n-1},t_n]. \end{cases} \tag{2}$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} S_1(t_0)&=f_0,\\ S_1(t_1)=S_2(t_1)&=f_1,\\ &\vdots\\ S_{n-1}(t_{n-1})=S_n(t_{n-1})&=f_{n-1},\\ S_n(t_n)&=f_n. \end{aligned}$$

Wyznaczymy splajn pierwszego stopnia interpolujący dane

t_i	-1	0	1
$f_i=f(t_i)$	0	1	3

Ze wzoru (7) mamy

$$S(t)=\begin{cases} 0\cdot\frac{t-0}{-1-0}+1\cdot\frac{t-(-1)}{0-(-1)}, & t\in[-1,0], \\ 1\cdot\frac{t-1}{0-1}+3\cdot\frac{t-0}{1-0}, & t\in[0,1] \end{cases} = \begin{cases} t+1, & t\in[-1,0], \\ 2t+1, & t\in[0,1]. \end{cases}$$

Zadanie 19. Wyznacz splajn pierwszego stopnia interpolujący dane

t_i	0	1	2	3	4
$f_i = f(t_i)$	3	1	0	2	1

Przykład 14. *(Splajny naturalne stopnia 3)*
Wyznaczymy naturalny splajn kubiczny, tzn. splajn stopnia 3, który oprócz warunków interpolacji

$$S_i(t_i) = f_i, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

i warunków ciągłości w węzach wewnętrznych $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$

$$\lim_{t \to t_i^-} S^{(k)}(t) = \lim_{t \to t_i^+} S^{(k)}(t), \quad k = 0, 1, 2,$$

spełnia dodatkowo

$$S''(t_0) = S''(t_n) = 0. \tag{3}$$

Do obliczenia mamy współczynniki a_i, b_i, c_i, d_i, $i = 0, 1$:

$$S(t) = \begin{cases} S_0(t) = a_0 t^3 + b_0 t^2 + c_0 t + d_0, & t \in [-1, 0], \\ S_1(t) = a_1 t^3 + b_1 t^2 + c_1 t + d_1, & t \in [0, 1] \end{cases}$$

przy warunkach $S(-1) = -1$, $S(0) = 2$, $S(1) = -3$.

Z warunków interpolacji mamy

$$\begin{aligned} 2 &= S_0(0) = d_0, \\ 2 &= S_1(0) = d_1, \\ -1 &= S_0(-1) = -a_0 + b_0 - c_0, \\ -3 &= S_1(1) = a_1 + b_1 + c_1. \end{aligned}$$

Obliczamy pierwszą pochodną S

$$S'(t) = \begin{cases} S_0'(t) = 3a_0 t^2 + 2b_0 t + c_0, & t \in [-1, 0], \\ S_1'(t) = 3a_1 t^2 + 2b_1 t + c_1, & t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Z warunku ciągłości dla wewnętrznego węzła $t_1 = 0$ otrzymujemy $S'(0) = c_0 = c_1$. Obliczamy drugą pochodną S

$$S''(t) = \begin{cases} S_0''(t) = 6a_0 t + 2b_0, & t \in [-1, 0], \\ S_1''(t) = 6a_1 t + 2b_1, & t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Z warunku ciągłości dla $t_1 = 0$ mamy $S''(0) = b_0 = b_1$. Dwa dodatkowe warunki (3) przyjmują postać

$$\begin{aligned} 0 &= S''(-1) = -6a_0 + 2b_0, \\ 0 &= S''(1) = 6a_1 + 2b_1. \end{aligned}$$

Stąd

$$S(t) = \begin{cases} S_0(t) = -t^3 - 3t^2 - t + 2, & t \in [-1, 0], \\ S_1(t) = t^3 - 3t^2 - t + 2, & t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Zadanie 20. Wyznacz naturalny splajn kubiczny interpolujący dane

1.

t_i	0	1	4
$f_i = f(t_i)$	26	7	25

2.

t_i	-1	0	1
$f_i = f(t_i)$	5	7	9

3.

t_i	-1	0	1
$f_i = f(t_i)$	13	7	9

Zadanie 21. Sprawdź, czy dana funkcja określa naturalny splajn kubiczny

1. $S(t) = \begin{cases} (t+1)^3 + 2(t+1), & t \in [-1, 0], \\ 3t^2 + 5t + 3, & t \in [0, 1] \\ -(t-1)^3 + 3(t-1)^2 + 11(t-1) + 11, & t \in [1, 2] \end{cases}$

2. $S(t) = \begin{cases} (t+1)^3 + t + 1, & t \in [-1, 0], \\ (t-1)^3 + (t-1) + 4, & t \in [0, 1] \end{cases}$

Przykład 15. *(Splajny zupełne stopnia 3)*
Wyznaczymy splajn kubiczny interpolujący funkcję $f(t) = t^4$ na przedziale $[-1, 1]$, przy podziale $t_0 = -1$, $t_1 = 0$, $t_2 = 1$ oraz warunkach $S'(-1) = f'(-1)$, $S'(1) = f'(1)$.

Oznaczamy $f_0 = f(-1) = 1$, $f_1 = f(0) = 0$, $f_2 = f(1) = 1$, $h = t_{i+1} - t_i = 1$, $n = 2$.

Zupełny splajn kubiczny dany jest wzorem

$$S_i(t) = a_i(t - t_i)^3 + b_i(t - t_i)^2 + c_i(t - t_i) + d_i, \quad t \in [t_i, t_{i+1}], \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

gdzie dla $i = 0, 1, \dots, n-1$ mamy

$$\begin{aligned} d_i &= S_i(t_i) = f_i, \\ c_i &= S_i'(t_i), \\ b_i &= \frac{1}{2}S''(t_i) = \frac{3}{h^2}(f_{i+1} - f_i) - \frac{1}{h}(S_i'(t_{i+1}) + 2S_i'(t_i)), \\ a_i &= \frac{1}{6}S'''(t_i) = \frac{2}{h^3}(f_i - f_{i+1}) + \frac{1}{h^2}(S_i'(t_{i+1}) + S_i'(t_i)) \end{aligned}$$

oraz

$$S_{i-1}'(t_{i-1}) + 4S_i'(t_i) + S_i'(t_{i+1}) = \frac{3}{h}(f_{i+1} - f_{i-1}), \qquad i = 1, \dots, n-1. \tag{4}$$

Zatem

$$\begin{aligned} S(t) &= \begin{cases} S_0(t) = a_0(t - t_0)^3 + b_0(t - t_0)^2 + c_0(t - t_0) + d_0, & t \in [-1, 0], \\ S_1(t) = a_1(t - t_1)^3 + b_1(t - t_1)^2 + c_1(t - t_1) + d_1, & t \in [0, 1] \end{cases} \\ &= \begin{cases} S_0(t) = a_0(t + 1)^3 + b_0(t + 1)^2 + c_0(t + 1) + d_0, & t \in [-1, 0], \\ S_1(t) = a_1t^3 + b_1t^2 + c_1t + d_1, & t \in [0, 1] \end{cases} \end{aligned}$$

Następujące współczynniki są dane

$$d_0 = f_0 = 1, \quad d_1 = f_1 = 0, \quad d_2 = f_2 = 1.$$

Obliczymy współczynniki c_i. Ponieważ $n = 2$, układ (4) sprowadza się do jednego równania (dla $i = 1$)

$$\begin{aligned} S_0'(t_0) + 4S_1'(t_1) + S_1'(t_2) &= \frac{3}{h}(f_2 - f_0) \\ S_0'(-1) + 4S_1'(0) + S_1'(1) &= \frac{3}{h}(1 - 1) \\ -4 + 4S_1'(0) + 4 &= 0 \\ S_1'(0) &= 0, \end{aligned}$$

gdyż $f'(t) = 4t^3$, a więc warunki z treści zadania przyjmują postać $S'(-1) = f'(-1) = -4$, $S'(1) = f'(1) = 4$. Zatem

$$c_0 = S_0'(-1) = -4, \quad c_1 = S_1'(0) = 0, \quad c_2 = S_1'(1) = 4.$$

Obliczamy dalej

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{3}{h^2}(f_1 - f_0) - \frac{1}{h}(S_0'(t_1) + 2S_0'(t_0)) = \frac{3}{h^2}(f_1 - f_0) - \frac{1}{h}(S_0'(0) + 2S_0'(-1)) \\ &= \frac{3}{h^2}(d_1 - d_0) - \frac{1}{h}(c_1 + 2c_0) = \frac{3}{1^2}(0 - 1) - \frac{1}{1}(0 + 2\cdot(-4)) = 5, \\ b_1 &= \frac{3}{h^2}(f_2 - f_1) - \frac{1}{h}(S_1'(t_2) + 2S_1'(t_1)) = \frac{3}{h^2}(f_2 - f_1) - \frac{1}{h}(S_1'(1) + 2S_1'(0)) \\ &= \frac{3}{h^2}(d_2 - d_1) - \frac{1}{h}(c_2 + 2c_1) = \frac{3}{1^2}(1 - 0) - \frac{1}{1}(4 + 2\cdot 0) = -1, \\ a_0 &= \frac{2}{h^3}(f_0 - f_1) + \frac{1}{h^2}(S_0'(t_1) + S_0'(t_0)) = \frac{2}{h^3}(f_0 - f_1) + \frac{1}{h^2}(S_0'(0) + S_0'(-1)) \\ &= \frac{2}{h^3}(d_0 - d_1) + \frac{1}{h^2}(c_1 + c_0) = \frac{2}{1^3}(1 - 0) + \frac{1}{1^2}(0 + (-4)) = -2, \\ a_1 &= \frac{2}{h^3}(f_1 - f_2) + \frac{1}{h^2}(S_1'(t_2) + S_1'(t_1)) = \frac{2}{h^3}(f_1 - f_2) + \frac{1}{h^2}(S_1'(1) + S_1'(0)) \\ &= \frac{2}{1^3}(d_1 - d_2) + \frac{1}{1^2}(c_2 + c_1) = \frac{2}{1^3}(0 - 1) + \frac{1}{1^2}(4 + 0) = 2, \end{aligned}$$

gdzie korzystaliśmy też z warunków ciągłości. Stąd

$$S(t) = \begin{cases} -2(t+1)^3 + 5(t+1)^2 - 4(t+1) + 1 = -2t^3 - t^2, & t \in [-1, 0], \\ 2t^3 - t^2, & t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Zadanie 22. Wyznacz splajn trzeciego stopnia interpolujący dane

t_i	0	1	2	3
$f_i = f(t_i)$	1	0	-1	0

przy warunkach $S'(0) = 0$, $S'(3) = -6$.

Odp. $S(t) = \begin{cases} S_0(t) = -t^2 + 1, & t \in [0,1], \\ S_1(t) = 2t^3 - 7t^2 + 6t - 1, & t \in [1,2], \\ S_2(t) = -6t^3 + 41t^2 - 90t + 63, & t \in [2,3]. \end{cases}$

Zadanie 23. Dla danych

t_i	1	2	3
$f_i = f(t_i)$	2	3	5

wyznacz splajn kubiczny

1. naturalny: $S''(1) = S''(3) = 0$, *Odp.* $S(t) = \begin{cases} S_0(t) = \frac{1}{4}(t-1)^3 + \frac{3}{4}(t-1) + 2, & t \in [1,2], \\ S_1(t) = -\frac{1}{4}(t-2)^3 + \frac{3}{4}(t-2)^2 + \frac{3}{2}(t-2) + 3, & t \in [2,3] \end{cases}$

2. zupełny: $S'(1) = 1$, $S'(3) = 2$ *Odp.* $S(t) = \begin{cases} S_0(t) = \frac{1}{2}(t-1)^3 - \frac{1}{2}(t-1)^2 + (t-1) + 2, & t \in [1,2], \\ S_1(t) = -\frac{1}{2}(t-2)^3 + (t-2)^2 + \frac{3}{2}(t-2) + 3, & t \in [2,3] \end{cases}$

Przykład 16. *(Różniczka Gateaux i różniczka Frécheta)*
Niech $f : D \to Y$, gdzie $D \subset X$, X - przestrzeń liniowa, Y - przestrzeń metryczna.

Niech $x_0 \in D$, $h \in X$. Przyrost h jest *dopuszczalny* dla x_0, jeżeli $x_0 + \alpha h \in D$ dla dostatecznie małych liczb α (tzn. istnieje $\alpha_0 > 0$ takie, że $x_0 + \alpha h \in D$ dla $|\alpha| \leq \alpha_0$).

Niech $h \in X$ będzie dopuszczalnym przyrostem dla $x_0 \in D$. Jeżeli istnieje granica

$$\delta f_{x_0}(h) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0)}{\alpha},$$

to nazywamy ją *różniczką Gateaux* odwzorowania f w punkcie x_0 dla przyrostu h.

Niech $Y = \mathbb{R}$, czyli odwzorowanie f jest funkcjonałem, $f : D \to \mathbb{R}$. Niech $h \in X$ będzie dopuszczalnym przyrostem dla $x_0 \in D$. Wtedy

$$\delta f_{x_0}(h) = g'(0), \quad \text{gdzie} \;\; g(\alpha) = f(x_0 + \alpha h), \quad |\alpha| \leq \alpha_0. \tag{5}$$

Obliczymy różniczką Gateaux funkcjonału $f : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ danego wzorem $f(x) = x^2\left(\frac{1}{2}\right)$. Mamy

$$g(\alpha) = (x_0 + \alpha h)^2 \left(\frac{1}{2}\right) = \left[x_0\left(\frac{1}{2}\right) + \alpha h\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 \quad \text{oraz} \quad g'(\alpha) = 2\left[x_0\left(\frac{1}{2}\right) + \alpha h\left(\frac{1}{2}\right)\right] h\left(\frac{1}{2}\right).$$

Zatem

$$\delta f_{x_0}(h) = g'(0) = 2x_0\left(\frac{1}{2}\right) h\left(\frac{1}{2}\right).$$

Pokażemy teraz, że otrzymana różniczka Gateaux jest też różniczką Frécheta. Przypomnijmy definicję.

Niech X, Y będą przestrzeniami unormowanymi, $D \subset X$ - otwarty, $f : D \to Y$. *Różniczką Frécheta* odwzorowania f w punkcie $x \in D$ nazywamy odwzorowanie liniowe, ciągłe $\partial f_x : X \to Y$, jeżeli dla każdego $h \in X$

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - \partial f_x(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Odwzorowanie $\delta f_x(h) = 2x\left(\frac{1}{2}\right) h\left(\frac{1}{2}\right)$ jest ciągłe, można pokazać, że jest też liniowe. Obliczamy

$$\frac{\|f(x+h) - f(x) - \partial f_x(h)\|}{\|h\|} = \frac{\left|(x+h)^2(\frac{1}{2}) - x^2(\frac{1}{2}) - 2x(\frac{1}{2})h\left(\frac{1}{2}\right)\right|}{\|h\|} = \frac{\left|h^2\left(\frac{1}{2}\right)\right|}{\|h\|} \leq \frac{\|h\|^2}{\|h\|} = \|h\| \to 0, \quad \text{gdy } \|h\| \to 0.$$

Zadanie 24. Oblicz różniczkę Gateaux funkcjonału $f : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ danego wzorem

1. $f(x) = x^k(t_0), \quad t_0 \in [0,1]$
2. $f(x) = x\left(\frac{1}{2}\right) x\left(\frac{1}{3}\right)$
3. $f(x) = x(0)\sin^2 x(1)$
4. $f(x) = \int_0^1 x^3(t)\,dt$
5. $f(x) = x(0)\int_0^1 \cos^2 x(t)\,dt$
6. $f(x) = \int_0^1 e^{2x(t)x(0)}\,dt$

Pokaż, że różniczka Gateaux funkcjonału w przykładzie 2. jest również różniczką Frécheta.

Zadanie 25. Oblicz różniczkę Gateaux funkcjonału $f : H \to \mathbb{R}$, H - unitarna, danego wzorem $f(x) = \|x\|^2$. Pokaż, że jest ona również różniczką Frécheta.

Zadanie 26. Zadanie planowania inwestycji polega na maksymalizacji funkcjonału

$$f(x) = \int_0^T e^{-\beta t} U(\alpha x(t) - x'(t))\,dt$$

opisującego zysk w czasie od 0 do T przy warunkach $x(0) = x_0, \quad x(T) = 0, \quad x(t) \geq 0,$

gdzie x_0 - kapitał początkowy, $x(t)$ - kapitał całkowity w chwili t, $r(t)$ - wydatki w chwili t, $U(r)$ - zysk zależny od wydatków r, α - stopa inwestycji, $e^{-\beta t}$ - czynnik dyskontujący.

Zauważmy, że prawo opisujące zmianę x dane jest równaniem $x'(t) = \alpha x(t) - r(t)$, tzn. wzrost kapitału jest proporcjonalny do inwestycji minus poniesione wydatki.

Niech $D = \{x \in C^1[0,T] \ : \ x \geq 0, \ \alpha x - x' \geq 0, \ x(0) = x_0, \ x(T) = 0\}$.

Różniczka Gateaux funkcjonału f w $x \in C^1[0,T]$ jest równa

$$\delta f_x(h) = \int_0^T e^{-\beta t} U'(\alpha x(t) - x'(t))(\alpha h(t) - h'(t))\,dt, \quad h \in C^1[0,T].$$

Ponieważ h ma być przyrostem dopuszczalnym dla $x \in D$, to zakładamy $h(0) = h(T) = 0$.

Warunek konieczny istnienia ekstremum $\delta f_x(h) = 0$ prowadzi do równania

$$U'(r(t)) = U'(r(0))e^{(\beta-\alpha)t}.$$

Przyjmując funkcję użyteczności $U(r) = 2\sqrt{r}$, pokaż, że

$$x(t) = x_0 e^{\alpha t} - r(0)\frac{e^{2(\alpha-\beta)t} - e^{\alpha t}}{\alpha - 2\beta}.$$

Ponadto przy założeniu $\frac{\alpha}{2} < \beta < \alpha$ pokaż, że wydatki początkowe dane są wzorem

$$r(0) = x_0 \frac{2\beta - \alpha}{1 - e^{(\alpha - 2\beta)T}}.$$

Przykład 17. *(Funkcjonał sprzężony do funkcjonału wypukłego)*
Wyznaczymy funkcjonał sprzężony $f^* : C^* \to \mathbb{R}$ do funkcjonału wypukłego $f : C \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $C = \mathbb{R}$.

Skorzystamy z faktu: jeżeli C–wypukły podzbiór przestrzeni unormowanej X, f–funkcjonał wypukły, to

$$C^* = \left\{ x^* \in X^* : \ \sup_{x\in C}\{\langle x, x^*\rangle - f(x)\} \ < \infty \right\}, \quad f^*(x^*) = \sup_{x\in C}\{\langle x, x^*\rangle - f(x)\},$$

gdzie $x^*(x) = x^*x = \langle x, x^*\rangle$ (i nie jest to zwykły iloczyn skalarny).

Mamy $C = \mathbb{R} = X$. Niech $x^* \in X^* = \mathbb{R}$ będzie ustalony.
Wtedy $h(x) := \langle x, x^*\rangle - f(x) = x^*x - x^2$. Wykres h to parabola skierowana w dół, więc h – ograniczony z góry.
Obliczamy $h'(x) = x^* - 2x$ oraz $h'(x) = 0$ wtw, gdy $x = \frac{1}{2}x^*$. Dalej mamy $h(x) = h\left(\frac{1}{2}x^*\right) = \frac{1}{4}(x^*)^2$ oraz $C^* = \mathbb{R}$. Zatem

$$f^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f^*(x^*) = \frac{1}{4}(x^*)^2.$$

Przykład 18. *(Funkcjonał sprzężony do funkcjonału wklęsłego)*
Wyznaczymy funkcjonał sprzężony $g^* : D^* \to \mathbb{R}$ do funkcjonału wklęsłego $g : D \to \mathbb{R}$ danego wzorem

$$g(x) = a\sqrt{x}, \quad a > 0, \quad D = [0, \infty).$$

Jeżeli D–wypukły podzbiór przestrzeni unormowanej X, g–funkcjonał wklęsły, to

$$D^* = \left\{ x^* \in X^* : \inf_{x \in D} \{\langle x, x^* \rangle - g(x)\} > -\infty \right\}, \quad g^*(x^*) = \inf_{x \in D} \{\langle x, x^* \rangle - g(x)\}.$$

Badamy $h(x) := \langle x, x^* \rangle - g(x) = xx^* - a\sqrt{x}$.
Mamy $h(x) > -\infty$ wtw, gdy $x^* > 0$. Stąd $D^* = (0, \infty)$.
Dalej mamy $0 = h'(x) = x^* - \frac{a}{2\sqrt{x}}$, skąd otrzymujemy $x = \frac{a^2}{4(x^*)^2}$ oraz $h\left(\frac{a^2}{4(x^*)^2}\right) = \frac{-a^2}{4x^*}$. Zatem

$$g^* : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad g^*(x^*) = -\frac{a^2}{4x^*}.$$

> **Zadanie 27.** Pokaż, że funkcjonał sprzężony $g^* : D^* \to \mathbb{R}$ do funkcjonału $g : D \to \mathbb{R}$, $g(x) = x$, $D = [0, \infty)$ dany jest wzorem $g^*(x^*) = 0$, $D^* = (1, \infty)$.

Przykład 19. *(Lokata)* Za pomocą funkcjonałów dualnych rozwiążemy problem lokaty kapitału, jeżeli zysk powstały w wyniku działania i-tej akcji wynosi

$$g_i(x_i) = a_i\sqrt{x_i}, \quad a_i > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad n \geq 2,$$

a posiadany kapitał jest równy $x_0 > 0$.

1. Formułujemy zadanie optymalizacji: $g(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x_i) \to \max$ pod warunkiem $\sum_{i=1}^{n} x_i = x_0, \ x_i \geq 0.$

2. Definiujemy następujące zbiory i funkcjonały

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i = x_0 \right\}, \quad f : C \to \mathbb{R}, \ f(x) = 0,$$

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0\}, \qquad g : D \to \mathbb{R}, \ g(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x_i).$$

3. Korzystamy z Twierdzenia Fenchela o dualności

$$\begin{aligned}\sup_{x \in C \cap D} g(x) &= -\inf_{x \in C \cap D} \{-g(x)\} = -\inf_{x \in C \cap D} \{f(x) - g(x)\} \\ &= -\max_{x^* \in C^* \cap D^*} \{g^*(x^*) - f^*(x^*)\} = \min_{x^* \in C^* \cap D^*} \{f^*(x^*) - g^*(x^*)\}. \end{aligned} \tag{6}$$

4. Wyznaczamy funkcjonał sprzężony do f. Nierówność

$$\sup_{x \in C} \{\langle x, x^* \rangle - f(x)\} = \sup_{x \in C} \{\langle x, x^* \rangle\} = \sup_{x \in C} \sum_{i=1}^{n} x_i x_i^* < \infty,$$

gdzie $\sum_{i=1}^{n} x_i = x_0$, zachodzi tylko dla x^* postaci $x^* = (\lambda, \lambda, \ldots, \lambda) = \lambda(1, 1, \ldots, 1) =: \lambda \cdot \mathbf{1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$f^* : C^* \to \mathbb{R}, \quad C^* = \{\lambda \cdot \mathbf{1}, \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad f^*(x^*) = \lambda x_0.$$

5. Wyznaczamy funkcjonał sprzężony do g. Z Przykładu 18 mamy $g_i^* : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g_i^*(x_i^*) = -\frac{a_i^2}{4x_i^*}$. Zatem

$$g^*(x^*) = \sum_{i=1}^{n} g_i^*(x_i^*) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{4x_i^*}.$$

6. Ponieważ $C^* = \{\lambda \cdot \mathbf{1}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ i $D^* = (0, \infty)$, to $C^* \cap D^* = \{\lambda \cdot \mathbf{1}, \lambda > 0\}$ oraz

$$g^*(x^*) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{4x_i^*} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{4\lambda} = -\frac{1}{4\lambda}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = -\frac{\|a\|^2}{4\lambda}.$$

7. Podstawiamy otrzymane wyniki do (6).

$$\sup_{x \in C\cap D} g(x) = \min_{x^* \in C^* \cap D^*} \{f^*(x^*) - g^*(x^*)\} = \min_{\lambda > 0} \left\{ \lambda x_0 + \frac{\|a\|^2}{4\lambda} \right\}$$

8. Badamy $h(\lambda) := \lambda x_0 + \frac{\|a\|^2}{4\lambda}$. Mamy

$$0 = h'(\lambda) = x_0 - \frac{\|a\|^2}{4\lambda^2} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{\|a\|}{2\sqrt{x_0}}; \qquad \text{oraz} \qquad h\left(\frac{\|a\|}{2\sqrt{x_0}}\right) = \|a\|\sqrt{x_0} \ \text{ – maksymalny zysk.}$$

Sprawdzając, że $\lim_{\lambda \to 0^+} h(\lambda) = \infty$, $\lim_{\lambda \to \infty} h(\lambda) = \infty$ upewniamy się, że rzeczywiście h osiąga minimum w $\frac{\|a\|}{2\sqrt{x_0}}$.

9. Wyznaczymy x_i, $i = 1, \ldots, n$, $n \geq 2$. Skorzystamy z drugiej tezy Twierdzenia Fenchela.
Niech $\widetilde{x} \in C \cap D$ realizuje infimum w (6). Ponadto mamy $\widetilde{x}^* = \lambda \cdot \mathbf{1}$. Wtedy

$$\min_{x \in D}\{\langle x, \widetilde{x}^*\rangle - g(x)\} = \min_{x \geq 0}\{\langle x, \widetilde{x}^*\rangle - g(x)\} = \min_{x_i \geq 0}\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i \widetilde{x}_i{}^* - \sum_{i=1}^{n} a_i\sqrt{x_i}\right\} = \min_{x_i \geq 0}\left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i\lambda - a_i\sqrt{x_i})\right\}.$$

Mamy $h_i(x_i) := x_i\lambda - a_i\sqrt{x_i} = x_i \cdot \dfrac{\|a\|}{2\sqrt{x_0}} - a_i\sqrt{x_i}$ oraz $0 = h_i'(x_i) = \dfrac{\|a\|}{2\sqrt{x_0}} - \dfrac{a_i}{2\sqrt{x_i}} \ \Leftrightarrow\ x_i = \dfrac{a_i^2 x_0}{\|a\|^2}$.

Zatem $\widetilde{x}_i := \dfrac{a_i^2 x_0}{\|a\|^2}$ jest optymalną inwestycją, która daje maksymalny zysk równy $g(\widetilde{x}) = \|a\|\sqrt{x_0}$.

10. Sprawdzenie:

$$g(\widetilde{x}) = \sum_{i=1}^{n} g_i(\widetilde{x}_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i\sqrt{\widetilde{x}_i} = \sum_{i=1}^{n} a_i\sqrt{\frac{a_i^2 x_0}{\|a\|^2}} = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{a_i\sqrt{x_0}}{\|a\|} = \frac{\sqrt{x_0}}{\|a\|}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \frac{\sqrt{x_0}}{\|a\|} \cdot \|a\|^2 = \|a\|\sqrt{x_0}.$$

Zadanie 28. Za pomocą funkcjonałów dualnych rozwiąż problem lokaty kapitału dla dwóch akcji, jeżeli zysk powstały w wyniku działania i-tej akcji wynosi

$$g_1(x_1) = 3\sqrt{x_1}, \quad g_2(x_2) = 4\sqrt{x_2},$$

a posiadany kapitał jest równy $x_0 = 200$.

Odp. $x_1 = 72$, $x_2 = 128$.

Zadanie 29. Za pomocą funkcjonałów dualnych rozwiąż problem lokaty kapitału dla dwóch akcji, jeżeli zysk powstały w wyniku działania i-tej akcji wynosi

$$g_1(x_1) = x_1, \quad g_2(x_2) = 2\sqrt{x_2},$$

a posiadany kapitał jest równy $x_0 = 100$.

Odp. $x_1 = 1$, $x_2 = 99$.

Przykład 20. *(Mnożniki Lagrange'a)* Rozwiążemy zadanie minimalizacji przy warunku typu równości

$$\begin{aligned} -x_1^2 x_2^{-1} &\to \min \\ 2x_1 + 3x_2 &= 6. \end{aligned}$$

Funkcja Lagrange'a jest postaci

$$L(x_1, x_2, \lambda) = -x_1^2 x_2^{-1} + \lambda(2x_1 + 3x_2 - 6),$$

warunki Kuhna-Tuckera:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= -2x_1 x_2^{-1} + 2\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= x_1^2 x_2^{-2} + 3\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= 2x_1 + 3x_2 - 6 = 0. \end{aligned}$$

Dzielimy stronami dwa pierwsze równania i otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{-2x_1 x_2^{-1}}{x_1^2 x_2^{-2}} &= \frac{-2\lambda}{-3\lambda} \\ x_1 &= -3x_2. \end{aligned}$$

Wstawiamy $x_1 = -3x_2$ do trzeciego warunku: $2x_1 + 3x_2 - 6 = 0$, otrzymując równanie $2(-3x_2) + 3x_2 - 6 = 0$, skąd rozwiązanie: $x_2 = -2$, $x_1 = 6$. Mnożnik Lagrange'a wynosi $\lambda = -3$.

Zauważmy, że funkcja minimalizowana nie jest wypukła, więc warunki Kuhna-Tuckera są jedynie warunkami koniecznymi lokalnej optymalności. Rozwiązanie $x_1 = 6$, $x_2 = -2$ nie jest optymalne, istnieje lepsze, np. $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

Przykład 21. *(Mnożniki Lagrange'a)* Rozwiążemy zadanie minimalizacji przy warunkach typu równości i nierówności

$$x_1^2 + x_2^2 \to \min \tag{7}$$
$$x_1 \geq 0, \tag{8}$$
$$x_2 \geq 3, \tag{9}$$
$$x_1 + x_2 = 4. \tag{10}$$

Warunki zadania piszemy w postaci $-x_1 \leq 0$, $-x_2 + 3 \leq 0$, $x_1 + x_2 - 4 = 0$. Funkcja Lagrange'a dana jest wzorem

$$L(x, \mu, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \mu_1 \cdot (-x_1) + \mu_2 \cdot (-x_2 + 3) + \lambda(x_1 + x_2 - 4),$$

warunki Kuhna-Tuckera:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= 2x_1 - \mu_1 + \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= 2x_2 - \mu_2 + \lambda = 0, \\ x_1 + x_2 - 4 &= 0, \\ \mu_1 x_1 &= 0,\ \mu_1 \geq 0 \\ \mu_2(x_2 - 3) &= 0,\ \mu_2 \geq 0 \\ x_1 &\geq 0, \\ x_2 &\geq 3. \end{aligned}$$

Analizując warunki $\mu_1 x_1 = 0$ i $\mu_2(x_2 - 3) = 0$, rozpatrujemy cztery przypadki.

Przypadek 1. $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Wtedy trzy pierwsze warunki są postaci

$$\begin{aligned} 2x_1 + \lambda &= 0, \\ 2x_2 + \lambda &= 0, \\ x_1 + x_2 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

i dają rozwiązanie $x_1 = x_2 = 2$, co jest sprzeczne z warunkiem $x_2 \geq 3$.

Przypadek 2. $\mu_1 \neq 0$, $\mu_2 \neq 0$. Ponieważ $\mu_1 x_1 = 0$ i $\mu_2(x_2 - 3) = 0$, to $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, ale nie jest spełniony warunek $x_1 + x_2 - 4 = 0$.

Przypadek 3. $\mu_1 \neq 0$, $\mu_2 = 0$. Wtedy z równości $\mu_1 x_1 = 0$ otrzymujemy $x_1 = 0$ i wstawiając do $x_1 + x_2 - 4 = 0$, dostajemy $x_2 = 4$. Z drugiego równania: $2x_2 + \lambda = 0$ mamy $\lambda = -8$. Wstawiamy to do pierwszego równania: $2x_1 - \mu_1 + \lambda = 0$ i otrzymujemy $\mu_1 = -8$, co jest sprzeczne z założeniem, że $\mu_1 > 0$.

Przypadek 4. $\mu_1 = 0$, $\mu_2 \neq 0$. Wtedy z równości $\mu_2(x_2 - 3) = 0$ otrzymujemy $x_2 = 3$ i wstawiając do $x_1 + x_2 - 4 = 0$, dostajemy $x_1 = 1$. Z pierwszego równania: $2x_1 + \lambda = 0$ mamy $\lambda = -2$. Wstawiamy to do drugiego równania: $\mu_2(x_2 - 3) = 0$ i mamy $\mu_2 = 4$.

Zauważmy, że

- minimalizowana funkcja $f(x) := x_1^2 + x_2^2$ jest wypukła. Aby się o tym przekonać, wystarczy sprawdzić, że macierz Hessego jest dodatnio półokreślona, tzn. minory główne są nieujemne (macierz Hessego jest kwadratowa i symetryczna):

$$H(x) = H([x_1, x_2]^T) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- ograniczenia (8),(9) tworzą zbiory wypukłe,
- funkcja liniowa (10) jest wypukła,

oraz przecięcie zbiorów wypukłych jest zbiorem wypukłym, zatem zadanie jest wypukłe. Stąd mamy dokładnie jedno globalne rozwiązanie $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

Zadanie 30. Metodą mnożników Lagrange'a rozwiąż zadanie

$$\begin{aligned} -x_1^{-3} x_2^4 &\to \min \\ 5x_1 + 2x_2 &= 20. \end{aligned}$$

Zadanie 31. Metodą mnożników Lagrange'a rozwiąż zadanie

$$\begin{aligned} 2x_1^2 + x_2^2 &\to \min \\ x_1 &\geq 4 \\ x_2 &\geq 0 \\ x_1 + x_2 &= 6. \end{aligned}$$

Zadanie 32. Metodą mnożników Lagrange'a rozwiąż zadanie

$$\begin{aligned} (x_1 - 1)^2 + x_2 - 2 &\to \min \\ -x_1 + x_2 - 1 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2 &\leq 0. \end{aligned}$$

Przykład 22. Za pomocą metody Newtona

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f'(x^{(k)})}{f''(x^{(k)})}, \quad x^{(0)} - \text{ ustalone} \tag{11}$$

znajdziemy argument $x \in \mathbb{R}$, w którym funkcja

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \sin x$$

ma minimum, przyjmując punkt startowy $x^{(0)} = 0.5$ i dokładność $\epsilon = 10^{-5} = 0.00001$, tzn. obliczenia kończymy, gdy $\left|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right| < \epsilon$.

Mamy $f'(x) = x - \cos x$, $f''(x) = 1 + \sin x$. Korzystając z (11):

$$\begin{aligned}
x^{(1)} &= x^{(0)} - \frac{f'(x^{(0)})}{f''(x^{(0)})} = 0.5 - \frac{f'(0.5)}{f''(0.5)} = 0.5 - \frac{0.5 - \cos 0.5}{1 + \sin 0.5} = 0.5 - \frac{-0.3775}{1.479} = 0.7552,\\
&|x^{(1)} - x^{(0)}| = |0.7552 - 0.5| = 0.2552 > 0.00001;\\
x^{(2)} &= x^{(1)} - \frac{f'(x^{(1)})}{f''(x^{(1)})} = 0.7552 - \frac{f'(0.7552)}{f''(0.7552)} = 0.7552 - \frac{0.0271}{1.685} = 0.7391,\\
&|x^{(2)} - x^{(1)}| = |0.7552 - 0.7391| = 0.0161 > 0.00001;\\
x^{(3)} &= x^{(2)} - \frac{f'(x^{(2)})}{f''(x^{(2)})} = 0.7391 - \frac{f'(0.7391)}{f''(0.7391)} = 0.7391 - \frac{9.461 \cdot 10^{-5}}{1.673} = 0.7390,\\
&|x^{(3)} - x^{(2)}| = |0.7390 - 0.7391| = 0.0001 > 0.00001;\\
x^{(4)} &= x^{(3)} - \frac{f'(x^{(3)})}{f''(x^{(3)})} = 0.7390 - \frac{f'(0.7390)}{f''(0.7390)} = 0.7390 - \frac{1.17 \cdot 10^{-9}}{1.673} = 0.7390.
\end{aligned}$$

Ponieważ $\left|x^{(4)} - x^{(3)}\right| = 0 < 0.00001 = \epsilon$, to kończymy algorytm. Ponadto zauważmy, że

$$\begin{aligned}
f'(x^{(4)}) &= f'(0.7390) = -8.6 \cdot 10^{-6} \approx 0,\\
f''(x^{(4)}) &= f''(0.7390) = 1.673 > 0.
\end{aligned}$$

Zatem stwierdzamy, że poszukiwanym argumentem, w którym funkcja f przyjmuje minimum jest 0.739.

Zadanie 33. Korzystając z metody Newtona, znajdź argument $x \in \mathbb{R}$, w którym funkcja $f(x) = x^2 + 4\cos x$ przyjmuje minimum. Przyjmij $x^{(0)} = 1$ i $\epsilon = 0.2$. *Odp.* $x^{(11)} \approx 1.896$.

Przykład 23. Metodą Newtona zminimalizujemy funkcję $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$$f(x) = (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2, \quad x = [x_1, x_2]^T.$$

Przyjmujemy punkt startowy $x^{(0)} = [0, 3]^T$, wykonamy dwie iteracje.

Metoda Newtona dla funkcji wielu zmiennych jest postaci

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \left(H(x^{(k)})\right)^{-1} G(x^{(k)}), \quad x^{(0)} - \text{ ustalone},$$

gdzie $x \in \mathbb{R}^n$, $G(x) = \nabla f(x)$ jest gradientem funkcji f, $H(x) = D^2 f(x)$ jest macierzą Hessego funkcji f. Mamy

$$G(x) = G([x_1, x_2]^T) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ \frac{\partial f}{\partial x_2}\right] = [4(x_1 - 2)^3 + 2x_1 - 4x_2, \ -4(x_1 - 2x_2)]^T,$$

$$H(x) = H([x_1, x_2]^T) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12(x_1 - 2)^2 + 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Dla $k = 0$: $x^{(1)} = x^{(0)} - \left(H(x^{(0)})\right)^{-1} G(x^{(0)})$ oraz

$$G(x^{(0)}) = G([0, 3]^T) = [-44, 24]^T,$$

$$H(x^{(0)}) = H([0, 3]^T) = \begin{bmatrix} 50 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix},$$

$$\left(H([0, 3]^T)\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 50 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{192}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0208333 & 0.0104167 \\ 0.0104167 & 0.130208 \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= x^{(0)} - \left(H(x^{(0)})\right)^{-1} G(x^{(0)}) \\ &= [0,3]^T - \begin{bmatrix} 0.0208333 & 0.0104167 \\ 0.0104167 & 0.130208 \end{bmatrix} \cdot [-44, 24]^T = [0.667, 0.333]^T, \\ \left\| x^{(1)} - x^{(0)} \right\| &= \sqrt{(0.667-0)^2 + (0.333-3)^2} = 2.749141. \end{aligned}$$

Dla $k = 1$: $x^{(2)} = x^{(1)} - \left(H(x^{(1)})\right)^{-1} G(x^{(1)})$ oraz

$$\begin{aligned} G(x^{(1)}) = G([0.667, 0.333]^T) &= [-9.47237,\ -0.004]^T, \\ H(x^{(1)}) = H([0.667, 0.333]^T) &= \begin{bmatrix} 23.333 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}, \\ \left(H([0.667, 0.333]^T)\right)^{-1} &= \begin{bmatrix} 0.0468757 & 0.0234379 \\ 0.0234379 & 0.136719 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} x^{(2)} &= x^{(1)} - \left(H(x^{(1)})\right)^{-1} G(x^{(1)}) \\ &= [0.667, 0.333]^T - \begin{bmatrix} 0.0468757 & 0.0234379 \\ 0.0234379 & 0.136719 \end{bmatrix} \cdot [-9.47237,\ -0.004]^T = [1.111, 0.556]^T. \end{aligned}$$

Po dwóch iteracjach mamy $x \approx x^{(2)} = [1.111, 0.556]^T$.
Błąd lokalny $\|x^{(2)} - x^{(1)}\| = \sqrt{(1.111-0.667)^2 + (0.556-0.333)^2} = 0.496855.$

Wykonując kolejne iteracje, otrzymujemy

$$\begin{aligned} x^{(3)} &= [1.407,\ 0.704]^T, & \|x^{(3)} - x^{(2)}\| &= \sqrt{(1.407-1.111)^2 + (0.704-0.556)^2} = 0.330938, \\ x^{(4)} &= [1.605,\ 0.802]^T, & \|x^{(4)} - x^{(3)}\| &= \sqrt{(1.605-1.407)^2 + (0.802-0.704)^2} = 0.220925, \\ x^{(5)} &= [1.737,\ 0.868]^T, & \|x^{(5)} - x^{(4)}\| &= \sqrt{(1.737-1.605)^2 + (0.868-0.802)^2} = 0.147580, \\ x^{(6)} &= [1.824,\ 0.912]^T, & \|x^{(6)} - x^{(5)}\| &= \sqrt{(1.824-1.737)^2 + (0.912-0.868)^2} = 0.0974936, \\ x^{(7)} &= [1.883,\ 0.941]^T, & \|x^{(7)} - x^{(6)}\| &= \sqrt{(1.883-1.824)^2 + (0.941-0.912)^2} = 0.0657419, \\ x^{(8)} &= [1.922,\ 0.961]^T, & \|x^{(8)} - x^{(7)}\| &= \sqrt{(1.922-1.883)^2 + (0.961-0.941)^2} = 0.0438292. \end{aligned}$$

Po ośmiu iteracjach mamy $x \approx x^{(8)} = [1.922,\ 0.961]^T$ z dokładnością $\epsilon = 0.05$.
Zauważmy, że

$$\begin{aligned} G(x^{(8)}) = \nabla f(x^{(8)}) &= -0.0000370151 \approx 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x^{(8)}) = 12(1.922-2)^2 + 2 &= 2.07301 > 0, \end{aligned}$$

więc w $[1.922,\ 0.961]^T$ funkcja f ma rzeczywiście minimum.

Zadanie 34. Metodą Newtona zminimalizuj funkcję $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$. Przyjmij $x^{(0)} = [0, 0]^T$ i wykonaj dwie iteracje.

Przykład 24. *(Metoda najszybszego spadku)* Dany jest punkt początkowy $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$. Metoda generuje ciąg $\{x_k\}$ przybliżeń argumentu minimalizującego funkcję $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, gdzie

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - t^{(k)} \nabla f(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

oraz $t^{(k)} > 0$ minimalizuje funkcję

$$\varphi^{(k)}(t) = f\left(x^{(k)} - t\nabla f(x^{(k)})\right), \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Dla funkcji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x) = 4x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2, \quad x = [x_1, x_2]^T$$

znajdziemy argument minimalizujący, zaczynając w punkcie $x^{(0)} = [2, 3]^T$. Wykonamy trzy iteracje.

Obliczamy gradient funkcji f: $\nabla f(x) = \nabla f\left([x_1, x_2]^T\right) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ \frac{\partial f}{\partial x_2}\right]^T = [8x_1 - 4x_2, \ 4x_2 - 4x_1]^T$.

<u>Dla $k = 0$</u>: $x^{(1)} = x^{(0)} - t^{(0)}\nabla f(x^{(0)})$. Mamy $\nabla f(x^{(0)}) = \nabla f([2, 3]^T) = [4, 4]^T$.
Aby obliczyć $t^{(0)}$, minimalizujemy funkcję $\varphi^{(0)}(t) = f(x^{(0)} - t\nabla f(x^{(0)})) = f([2, 3]^T) - t\nabla f([2, 3]^T) = f(2 - 4t, 3 - 4t)$. Mamy

$$\begin{aligned}
\left(\varphi^{(0)}(t)\right)' &= -\nabla f(x^{(0)} - t\nabla f(x^{(0)})) \cdot \nabla f(x^{(0)}) \\
&= -\nabla f([2, 3]^T - t[4, 4]^T) \cdot [4, 4]^T \\
&= -\nabla f([2 - 4t, 3 - 4t]^T) \cdot [4, 4]^T \\
&= -\left[8(2 - 4t) - 4(3 - 4t), \ 4(3 - 4t) - 4(2 - 4t)\right] \cdot [4, 4]^T \\
&= -\left[16 - 32t - 12 + 16t, \ 12 - 16t - 8 + 16t\right] \cdot [4, 4]^T \\
&= -\left[-16t + 4, \ 4\right] \cdot [4, 4]^T \\
&= 64t - 32
\end{aligned}$$

oraz

$$\left(\varphi^{(0)}(t)\right)' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 64t - 32 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{1}{2}.$$

Zauważmy ponadto, że $\left(\varphi^{(0)}(t)\right)'' = 64 > 0$. Zatem w $t = \frac{1}{2}$ funkcja $\varphi^{(0)}$ ma minimum. Przyjmujemy więc $t^{(0)} = \frac{1}{2}$ oraz mamy

$$x^{(1)} = x^{(0)} - t^{(0)}\nabla f(x^{(0)}) = [2, 3]^T - \frac{1}{2} \cdot [4, 4]^T = [0, 1]^T.$$

<u>Dla $k = 1$</u>: $x^{(2)} = x^{(1)} - t^{(1)}\nabla f(x^{(1)})$. Mamy

$$\begin{aligned}
\nabla f(x^{(1)}) &= \nabla f([0, 1]^T) = [-4, 4]^T, \\
\varphi^{(1)}(t) &= f(x^{(1)} - t\nabla f(x^{(1)})) = f([0, 1]^T - t\nabla f([0, 1]^T)) = f(4t, 1 - 4t), \\
\left(\varphi^{(1)}(t)\right)' &= -[8 \cdot 4t - 4(1 - 4t), \ 4(1 - 4t) - 4 \cdot 4t] \cdot [-4, 4]^T = -[48t - 4, \ -32t + 4] \cdot [-4, 4]^T = 320t - 32, \\
\left(\varphi^{(1)}(t)\right)' &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{1}{10}.
\end{aligned}$$

Ponieważ $\left(\varphi^{(1)}(t)\right)'' = 320 > 0$, funkcja $\varphi^{(1)}$ ma w $t = \frac{1}{10}$ minimum. Przyjmujemy więc $t^{(1)} = \frac{1}{10}$ oraz mamy

$$x^{(2)} = x^{(1)} - t^{(1)}\nabla f(x^{(1)}) = [0, 1]^T - \frac{1}{10} \cdot [-4, 4]^T = \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]^T.$$

Postępując analogicznie dla $k = 2$ otrzymujemy $x^{(3)} = \left[0, \frac{1}{5}\right]^T$.

Zadanie 35. Za pomocą metody najszybszego spadku znajdź argument minimalizujący funkcję $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$$f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2, \quad x = [x_1, x_2]^T,$$

zaczynając w punkcie $x^{(0)} = [1, 4]^T$. Wykonaj dwie iteracje.