Przykład 1. Znajdziemy wielomian stopnia 0 optymalny w sensie normy L^2 dla funkcji $f(t) = \sqrt{t}$, $t \in [0,1]$.
Szukamy $u(t) = a$, $a \in \mathbb{R}$ takiego, że $\|u - f\|_{L^2} \to \min$. Mamy

$$\|u-f\|_{L^2}^2 = \int_0^1 \left(a - \sqrt{t}\right)^2 dt = a^2 - \frac{4}{3}a + \frac{1}{2} =: g(a).$$

Warunek konieczny istnienia ekstremum: $g'(a) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2a - \frac{4}{3} = 0 \;\Leftrightarrow\; a = \frac{2}{3}$.
Ponieważ $g''(a) = 2 > 0$, funkcja g ma w $a = \frac{2}{3}$ minimum o wartości $g(\frac{2}{3}) = \frac{1}{18}$. Stąd $u(t) = \frac{2}{3}$ oraz $\|u - f\|_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{18}}$.

Zadanie 1. Znajdź wielomian stopnia 0 optymalny w sensie normy L^2 dla funkcji $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

1. $f(t) = \dfrac{1}{1+t}$ *Odp.* $u(t) = \ln 2$.
2. $f(t) = \sin t$ *Odp.* $u(t) = 1 - \cos 1$.

Przykład 2. Znajdziemy wielomian stopnia co najwyżej 1 optymalny w sensie normy L^2 dla funkcji $f(t) = t^2$, $t \in [0,1]$.
Szukamy zatem $u(t) = a + bt$, $a, b \in \mathbb{R}$ takiego, że $\|u - f\|_{L^2} \to \min$.
Sposób 1.

$$\|u-f\|_{L^2}^2 = \int_0^1 \left(a + bt - t^2\right)^2 dt = a^2 + \frac{1}{3}b^2 + ab - \frac{2}{3}a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{5} \;\; =: g(a,b).$$

Gradient funkcji g: $\Delta g = [g_a,\ g_b] = \left[2a + b - \frac{2}{3},\ a + \frac{2}{3}b - \frac{1}{2}\right]$.
Punkt stacjonarny: $\Delta g = 0 \;\Leftrightarrow\; a = -\frac{1}{6},\ b = 1$. Macierz Hessego: $H = \begin{bmatrix} g_{aa} & g_{ab} \\ g_{ba} & g_{bb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$.
Hesjan: $\det H = \frac{1}{3}$. Ponieważ $\det H > 0$, funkcja g ma w punkcie $(-\frac{1}{6}, 1)$ ekstremum.
Ponieważ $g_{aa} > 0$, w punkcie $(-\frac{1}{6}, 1)$ funkcja g ma minimum o wartości $g(-\frac{1}{6}, 1) = \frac{1}{180}$.
Zatem $u(t) = a + bt = -\frac{1}{6} + t$ oraz $\|u - f\|_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{180}}$.
Sposób 2.
Baza przestrzeni wielomianów stopnia co najwyżej 1: $\{1, t\}$. Niech $u_1(t) = 1$, $u_2(t) = t$.
Ponieważ w L^2 mamy $\langle u_1, u_1\rangle = \int_0^1 1\, dt = 1$, $\langle u_1, u_2\rangle = \langle u_2, u_1\rangle = \int_0^1 t\, dt = \frac{1}{2}$, $\langle u_2, u_2\rangle = \int_0^1 t^2\, dt = \frac{1}{3}$,
macierz Grama jest postaci $G = \begin{bmatrix} \langle u_1, u_1\rangle & \langle u_1, u_2\rangle \\ \langle u_2, u_1\rangle & \langle u_2, u_2\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.
Ponieważ $\langle f, u_1\rangle = \int_0^1 t^2\, dt = \frac{1}{3}$, $\langle f, u_2\rangle = \int_0^1 t^3\, dt = \frac{1}{4}$, mamy $b = \begin{bmatrix} \langle f, u_1\rangle \\ \langle f, u_2\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$.
Równania normalne $G\xi = b \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$, skąd $\xi_1 = -\frac{1}{6}$, $\xi_2 = 1$ oraz $u(t) = \xi_1 + \xi_2 t = -\frac{1}{6} + t$.

Zadanie 2. Znajdź wielomian stopnia co najwyżej 1 optymalny w sensie normy L^2 dla funkcji $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

1. $f(t) = t^3$ *Odp.* $u(t) = \frac{9}{10}t - \frac{1}{5}$.
2. $f(t) = \sqrt{t}$ *Odp.* $u(t) = \frac{4}{5}t + \frac{4}{15}$.

Zadanie 3. Znajdź wielomian stopnia co najwyżej 2 optymalny w sensie normy L^2 dla funkcji $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

1. $f(t) = t^3$ *Odp.* $u(t) = \frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{5}t + \frac{1}{20}$,
2. $f(t) = \sqrt{t}$ *Odp.* $u(t) = -\frac{4}{7}t^2 + \frac{48}{35}t + \frac{6}{35}$.

Zadanie 4. Znajdź wielomian stopnia 0 optymalny w sensie normy L^4 dla funkcji $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(t) = t$.
Odp. $u(t) = \frac{1}{2}$.

Przykład 3. Znajdziemy wielomian stopnia 0 optymalny w sensie normy L^∞ dla funkcji $f(t) = \dfrac{t}{1+t}$.
Szukamy zatem $u(t) = a$, $a \in \mathbb{R}$ takiego, że $\|u - f\|_{L^\infty} \to \min$. Mamy

$$\|u - f\|^2_{L^\infty} = \sup_{t\in[0,1]} \left| \frac{t}{1+t} - a \right|.$$

Ponieważ $g'(t) = \left(\frac{t}{1+t} - a\right)' = \frac{1}{(1+t)^2}$, to g' nie ma miejsc zerowych, a zatem g nie posiada ekstremów.
Obliczamy jej wartość na krańcach przedziału $[0, 1]$: $g(0) = -a$, $g(1) = \frac{1}{2} - a$. Wtedy

$$\|u - f\|^2_{L^\infty} = \max \left\{ |a|, \left| \frac{1}{2} - a \right| \right\} \to \min .$$

Stąd $a = \frac{1}{4}$ oraz $u(t) = \frac{1}{4}$.

Zadanie 5. Znajdź wielomian stopnia 0 optymalny w sensie normy L^∞ dla funkcji $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$

1. $f(t) = \sqrt{t}$ *Odp.* $u(t) = \frac{1}{2}$,
2. $f(t) = \sin t$ *Odp.* $u(t) = \frac{1}{2}\sin 1$.

Przykład 4. (*Warunek Haara*)
Niech $U = \{\{1, t, t^2\}\} = \operatorname{span}\{1, t, t^2\} = \{u(t) = a + bt + ct^2 : \ a, b, c \in \mathbb{R}\}$.
Sprawdzimy, czy U spełnia warunek Haara na $[0, 1]$.

Mamy $n = \dim U = 3$, $u_1(t) = 1$, $u_2(t) = t$, $u_3(t) = t^2$. Niech t_1, t_2, $t_3 \in [0, 1]$, takie że $t_1 \neq t_2 \neq t_3$.
Obliczamy wyznacznik

$$\begin{aligned}\Delta = \begin{vmatrix} u_1(t_1) & u_2(t_1) & u_3(t_1) \\ u_1(t_2) & u_2(t_2) & u_3(t_2) \\ u_1(t_3) & u_2(t_3) & u_3(t_3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ 1 & t_3 & t_3^2 \end{vmatrix} &= t_2t_3^2 - t_1t_3^2 + t_3t_1^2 - t_3t_2^2 + t_1t_2^2 - t_2t_1^2 \\ &= t_3^2(t_2 - t_1) + t_3(t_1^2 - t_2^2) + t_1t_2(t_2 - t_1) \\ &= (t_2 - t_1)[t_3(t_3 - t_2) - t_1(t_3 - t_2)] \\ &= (t_2 - t_1)(t_3 - t_2)(t_3 - t_1).\end{aligned}$$

Mamy $\Delta \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (t_2 - t_1)(t_3 - t_2)(t_3 - t_1) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_1 \neq t_2 \quad \wedge \quad t_2 \neq t_3 \quad \wedge \quad t_1 \neq t_3$, co jest prawdą z założeń. Zatem udowodniliśmy, że U spełnia warunek Haara.

Zadanie 6. Pokaż, że $U = \{\{1, t^2, t^4\}\}$ spełnia warunek Haara na $[0, 1]$, ale nie spełnia warunku Haara na $[-1, 1]$.
Aby pokazać, że U nie spełnia warunku Haara, wystarczy znaleźć punkty $t_1 \neq t_2 \neq t_3$ przedziału $[-1, 1]$, takie że $\Delta = 0$.

Zadanie 7. Pokaż, że $U = \{\{\sin t, \cos t\}\}$ spełnia warunek Haara na $[a, b] \subset (k\pi,\ (k + 1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Zadanie 8. Czy $U = \{\{e^{-t}, e^t\}\}$ spełnia warunek Haara na $[-1, 1]$?

Zadanie 9. Pokaż, że $U = \{\{1, \sin t, \cos t, \dots \sin nt, \cos nt\}\}$ spełnia warunek Haara na $[a, b]$, o ile $0 < b - a < 2\pi$.

Przykład 5. (*Wielomiany Czebyszewa*)
Niech $f(t) = t^3$, $t \in [-1, 1]$. Znajdziemy wielomian $u \in U = \{\{1, t, t^2\}\}$ najbliższy w sensie normy supremum do funkcji f, korzystając z wielomianów Czebyszewa.

Dla funkcji t^n wielomianem optymalnym $u \in U = \{\{1, t, t^2, \dots, t^{n-1}\}\}$ jest

$$u(t) = t^n - \frac{1}{2^{n-1}} T_n(t),$$

gdzie T_n oznacza n-ty wielomian Czebyszewa

$$\begin{aligned} T_0(t) &= 1, \\ T_1(t) &= t, \\ T_n(t) &= 2t\,T_{n-1}(t) - T_{n-2}(t). \end{aligned}$$

Mamy $u(t) = t^3 - \dfrac{1}{2^{3-1}} T_3(t) = t^3 - \dfrac{1}{4}(4t^3 - 3t) = \dfrac{3}{4}t.$

Zadanie 10. Niech $f(t) = t^5$, $t \in [-1, 1]$. Korzystając z wielomianów Czebyszewa, znajdź wielomian $u \in U = \{\{1, t, t^2, t^3, t^4\}\}$ najbliższy w sensie normy supremum do f.

Przykład 6. (*Algorytm Remeza*)

Znajdziemy wielomian stopnia co najwyżej 1 na $[0, 1]$ najbliższy w sensie normy supremum do funkcji $f(t) = \dfrac{1}{1+t}$.
Zauważmy, że $U = \{\{1, t\}\} = \{u(t) = a + bt : \ a, b \in \mathbb{R}\}$ spełnia warunek Haara.

1. Przyjmijmy, że pierwszym przybliżeniem alternansu są punkty $0,\ \frac{1}{2},\ 1$.
   Warunek alternansu: $f(t_i) - u(t_i) = (-1)^i E,\ \ i = 1, 2, 3.$

   Podstawiając $t_1 = 0, t_2 = \frac{1}{2}, t_3 = 1$, mamy układ $\begin{cases} a + E &= 1 \\ a + \frac{1}{2}b - E &= \frac{2}{3} \\ a + b + E &= \frac{1}{2} \end{cases}$ i jego rozwiązanie $a = \frac{23}{24}$, $b = -\frac{1}{2}$, $E = \frac{1}{24}$.

   Zatem $u(t) = a + bt = \dfrac{23}{24} - \dfrac{1}{2}t.$
   Sprawdzamy, czy u jest wielomianem optymalnym, tzn. czy $\max\limits_{t\in[0,1]} |f(t) - u(t)| = E.$

   Niech $r(t) = f(t) - u(t) = \dfrac{1}{1+t} - \dfrac{23}{24} + \dfrac{1}{2}t.$ Na $[0, 1]$ rozwiązujemy $r'(t) = 0 \ \Leftrightarrow\ t = \sqrt{2} - 1.$

   Mamy $\max\limits_{t\in[0,1]} |r(t)| = |r(\sqrt{2} - 1)| = \left|\sqrt{2} - \dfrac{35}{24}\right| = 0.048 \neq \dfrac{1}{24} = E.$ Zatem $u(t) = \dfrac{23}{24} - \dfrac{1}{2}t$ nie jest optymalny.

2. Drugim przybliżeniem alternansu są punkty $0,\ \sqrt{2} - 1,\ 1.$

   Podstawiając je do warunku alternansu, mamy $\begin{cases} a + E &= 1 \\ a + (\sqrt{2} - 1)b - E &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ a + b + E &= \frac{1}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4} \\ b &= -\frac{1}{2} \\ E &= \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

   Stąd $u(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2}t, \quad r(t) = \dfrac{1}{1+t} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}t, \quad r'(t) = 0 \ \Leftrightarrow\ t = \sqrt{2} - 1 \in [0, 1].$

   Mamy $\max\limits_{t\in[0,1]} |r(t)| = |r(\sqrt{2} - 1)| = \left|\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{3}{4}\right| = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} = E.$

   Zatem $u(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2}t$ jest poszukiwanym wielomianem optymalnym.

Zadanie 11. Znajdź wielomian u stopnia ≤ 1 najbliższy w sensie normy supremum do $f(t) = t^2$ na przedziale

1. $[0, 1]$ *Odp.* $u(t) = -\frac{1}{8} + t$
2. $[-1, 1]$ *Odp.* $u(t) = \frac{1}{2}$
3. $[0, 2]$ *Odp.* $u(t) = -\frac{1}{2} + 2t$

Zadanie 12. Znajdź wielomian u stopnia ≤ 1 najbliższy w sensie normy supremum do $f(t) = t^4$, $t \in [0, 1]$.
Odp. $u(t) = -\frac{3}{8\sqrt[3]{4}} + t$

Zadanie 13. Znajdź wielomian stopnia ≤ 1 na $[0, 1]$ najbliższy w sensie normy supremum do funkcji e^t.
Odp. $u(t) = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}(e - 1)\ln(e - 1) + (e - 1)t$

Zadanie 14. Niech V będzie przestrzenią unormowaną, $f : V \to \mathbb{R}$ funkcjonałem liniowym. Definiujemy

$$\|f\| = \inf\{m > 0 \,:\, \forall_{x\in V}\ |f(x)| \leq m\|x\|\}.$$

Wykaż, że

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|\leq 1, x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

Krok 1. Ponieważ $\{x \in V :\ \|x\| = 1\} \subseteq \{x \in V :\ \|x\| \leq 1, x \neq 0\} \subseteq \{x \in V :\ \|x\| \neq 0\}$, mamy

$$\sup_{\|x\|=1} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \sup_{\|x\|\leq 1, x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \sup_{\|x\|\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

Krok 2. Wykaż, że $\|f\| \leq \sup\limits_{\|x\|=1} \dfrac{|f(x)|}{\|x\|}$

Krok 3. Wykaż, że $\sup\limits_{\|x\|\neq 0} \dfrac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \|f\|$

Przykład 7. Obliczymy z definicji normę funkcjonału $f \in (C[0,1])^*$ danego wzorem $f(x) = \int_0^1 tx(t)\,dt$. Mamy

$$|f(x)| = \left|\int_0^1 tx(t)\,dt\right| \leq \int_0^1 |tx(t)|\,dt = \int_0^1 t|x(t)|\,dt \leq \int_0^1 t \sup_{t\in[0,1]} |x(t)|\,dt = \int_0^1 t\|x\|\,dt = \|x\| \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}\|x\|.$$

Zatem

$$\|f\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \sup_{\|x\|\leq 1} \frac{\frac{1}{2}\|x\|}{\|x\|} = \frac{1}{2}.$$

Zadanie 15. Oblicz z definicji normę funkcjonału $f \in (C[0,1])^*$, gdy

1. $f(x) = 5x(t)$,
2. $f(x) = x(1) - x(0)$, *Odp.* $\|f\| = 2$
3. $f(x) = x\left(\frac{1}{2}\right) + 2\int_0^1 x(t)\,dt$, *Odp.* $\|f\| = 3$
4. $f(x) = x(1) - \int_0^1 x(t)\,dt$ *Odp.* $\|f\| = 2$

Zadanie 16. (Twierdzenie Riesza-Frecheta) Niech V będzie przestrzenią Hilberta. Dla każdego funkcjonału liniowego i ograniczonego $f \in V^*$ istnieje dokładnie jeden wektor $y \in V$ taki, że dla każdego $x \in V$: $f(x) = \langle x, y\rangle$. Ponadto $\|f\| = \|y\|$.

1. Udowodnij jednoznaczność wektora $y \in V$.
2. Pokaż, że $\|f\| = \|y\|$ (tzn. odwzorowanie $V^* \ni f \longmapsto y \in V$ jest izometrią).

Zadanie 17. Znajdź wektor y z Twierdzenia Riesza-Frecheta, gdy

1. $V = \ell^2$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$, gdzie $a = (a_n) \in \ell^2$.
2. $V = \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = 3x_1 - 4x_2$.
3. $V = L^2([0,1])$, $f(x) = \int_0^1 x(t)t\,dt$.
4. $V = L^2([0,1])$, $f(x) = \int_0^1 x(t)(2+t)\,dt + \int_0^1 x(t)\,dt$.

Oblicz $\|f\|$ w 2–4.

Przykład 8. Dla $f \in (C[0,1])^*$ znajdziemy funkcję v o wahaniu skończonym na $[0,1]$ taką, że $f(x) = \int_0^1 x(t)\,dv(t)$.

Dla funkcjonału $f(x) = x\left(\frac{1}{2}\right) + \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{7}{8}} x(t)\,dt$ mamy $v(t) = \begin{cases} 0, & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ 1, & t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \\ t + \frac{1}{4}, & t \in \left[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right) \\ \frac{9}{8}, & t \in \left[\frac{7}{8}, 1\right] \end{cases}$,

gdyż

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x(t)\,dv(t) &= \int_0^{\frac{1}{2}} x(t)\cdot 0'\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} x(t)\cdot 1'\,dt + \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{7}{8}} x(t)\left(t+\frac{1}{4}\right)'\,dt + \int_{\frac{7}{8}}^{1} x(t)\cdot\left(\frac{9}{8}\right)'\,dt \\
&\quad + x\left(\frac{1}{2}\right)\left[v\left(\frac{1}{2}+\right) - v\left(\frac{1}{2}-\right)\right] + x\left(\frac{3}{4}\right)\left[v\left(\frac{3}{4}+\right) - v\left(\frac{3}{4}-\right)\right] + x\left(\frac{7}{8}\right)\left[v\left(\frac{7}{8}+\right) - v\left(\frac{7}{8}-\right)\right] \\
&= \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{7}{8}} x(t)\,dt + x\left(\frac{1}{2}\right)[1-0] + x\left(\frac{3}{4}\right)\left[\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right) - 1\right] + x\left(\frac{7}{8}\right)\left[\frac{9}{8} - \left(\frac{7}{8}+\frac{1}{4}\right)\right] \\
&= \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{7}{8}} x(t)\,dt + x\left(\frac{1}{2}\right) = f(x).
\end{aligned}$$

Zadanie 18. Dla danego funkcjonału $f \in (C[0,1])^*$ pokaż, że podana funkcja $v \in BV([0,1])$ spełnia $f(x) = \int_0^1 x(t)\,dv(t)$.

1. $f(x) = \frac{3}{4}x\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4}x\left(\frac{1}{2}\right)$, $\quad v(t) = \begin{cases} 0, & t \in \left[0, \frac{1}{3}\right) \\ \frac{3}{4}, & t \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \\ \frac{1}{2}, & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$
2. $f(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} x(t)\,dt$, $\quad v(t) = \begin{cases} 0, & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ t - \frac{1}{2}, & t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) \\ \frac{1}{6}, & t \in \left[\frac{2}{3}, 1\right] \end{cases}$
3. $f(x) = x(0) - \frac{1}{2}\int_0^1 x(t)\,dt$, $\quad v(t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ 1 - \frac{1}{2}t, & t \in (0,1] \end{cases}$
4. $f(x) = x\left(\frac{3}{4}\right) + \int_{\frac{1}{3}}^{1} x(t)\,dt$, $\quad v(t) = \begin{cases} 0, & t \in \left[0, \frac{1}{3}\right) \\ t - \frac{1}{3}, & t \in \left[\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right) \\ t + \frac{2}{3}, & t \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \end{cases}$
5. $f(x) = 2x(1) - x(0) + \int_0^1 tx(t)\,dt$, $\quad v(t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ \frac{1}{2}t^2 - 1, & t \in (0,1) \\ \frac{3}{2}, & t = 1 \end{cases}$

Zadanie 19. Dla danego funkcjonału $f \in (C[0,1])^*$ znajdź funkcję $v \in BV([0,1])$ taką, że $f(x) = \int_0^1 x(t)\,dv(t)$.

1. $f(x) = x\left(\frac{1}{2}\right)$
2. $f(x) = x(0)$
3. $f(x) = x(1)$
4. $f(x) = x(0) - x(1)$
5. $f(x) = x(0) + 3x\left(\frac{1}{2}\right) - x(1)$
6. $f(x) = \int_0^1 x(t)\,dt$
7. $f(x) = x\left(\frac{1}{2}\right) + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x(t)\,dt$
8. $f(x) = x\left(\frac{1}{2}\right) + 5\int_0^1 x(t)\,dt$
9. $f(x) = \int_0^1 x(t)\cos(\pi t)\,dt$
10. $f(x) = 4\int_0^1 t^2 x(t)\,dt$

Uwaga. Reprezentacja nie jest jednoznaczna na $BV[0,1]$; jest jednoznaczna na $NBV[0,1]$.
Mamy $v \in NBV[0,1] \;\Leftrightarrow\; (v(0) = 0$ i v - prawostronnie ciągła$)$.

Norma funkcjonału. Jeżeli $v \in NBV[0,1]$, to $||f|| = ||v|| = TV_0^1(v)$, gdzie $TV_a^b(v)$ - wahanie funkcji v na przedziale $[a,b]$. Jeżeli v jest funkcją monotoniczną na $[a,b]$, to $TV_a^b(v) = |v(b) - v(a)|$.

Przykład 9. Funkcja $v(t) = \begin{cases} 0, & t \in \left[0, \frac{1}{3}\right) \\ \frac{3}{4}, & t \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \\ \frac{1}{2}, & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$ jest monotoniczna na przedziałach, zatem

$TV_0^1(v) = TV_0^{\frac{1}{3}}(v) + TV_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}(v) + TV_{\frac{1}{2}}^1(v) = \left|v(\frac{1}{3}) - v(0)\right| + \left|v(\frac{1}{2}) - v(\frac{1}{3})\right| + \left|v(\frac{1}{2}) - v(1)\right| = \left|\frac{3}{4} - 0\right| + \left|\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right| + \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right| = 1.$

Zadanie 20. Oblicz normy funkcjonałów z zadań 18 i 19, korzystając z reprezentacji.

Przykład 10. a) Korzystając z Twierdzenia o dualności, znajdziemy $u \in U$, takie że $\|x - u\| \to \min$, gdy $X = \mathbb{R}^2$ z normą l^2, $x = (1,3)$, $U = \left\{\left(a, \frac{1}{2}a\right),\ a \in \mathbb{R}\right\} \subset X$.

Twierdzenie. *Niech X będzie przestrzenią rzeczywistą, liniową i unormowaną, $x \in X$, $U \subset X$. Wtedy*

$$\inf_{u \in U} ||x - u|| = \max_{||x^*|| \le 1,\ x^* \in U^\perp} x^*(x),$$

gdzie maksimum jest realizowane dla pewnego $x_0^* \in U^\perp$.
Ponadto, jeżeli infimum jest realizowane dla pewnego $u_0 \in U$, to element x_0^* jest współliniowy z elementem $x - u_0$.

<u>Zadanie pierwotne</u>. $\|x - u\| = \sqrt{(1-a)^2 + (3 - \frac{1}{2}a)^2} \to \min$.
Niech $f(a) = (1-a)^2 + (3 - \frac{1}{2}a)^2$. Wtedy $f'(a) = \frac{5}{2}a - 5$ oraz $f'(a) = 0$ dla $a = 2$, $f''(a) = \frac{5}{2} > 0$.
Zatem $u_0 = \left(a, \frac{1}{2}a\right) = (2,1)$.

<u>Zadanie dualne</u>. Szukany funkcjonał x^* ma spełniać $x^* \in U^\perp$, tzn. $x^*(u) = 0$ dla każdego $u \in U$.
Ponieważ przestrzenią dualną do l^2 jest l^2, to (z Tw. Riesza dla przestrzeni Hilberta) dla tego x^* mamy

$$\exists_{y \in X}\ \forall_{w \in X}\ x^*(w) = \langle w, y\rangle \quad \text{oraz} \quad ||x^*|| = ||y||.$$

Zatem dla $u \in U \subset X$ mamy

$$0 = x^*(u) = \langle u, y\rangle = \left\langle (a, \frac{1}{2}a), (y_1, y_2)\right\rangle = ay_1 + \frac{1}{2}ay_2.$$

Stąd $y_2 = -2y_1$ i $y = (b, -2b)$, $b \in \mathbb{R}$.

Kolejny warunek $||x^*|| \le 1$ oznacza $\sqrt{y_1^2 + y_2^2} \le 1$, czyli $y_1^2 + y_2^2 \le 1$. Wstawiając $y = (b, -2b)$, mamy $5b^2 \le 1$ i $b \in \left[-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right]$.

Mamy jeszcze $x^*(x) = \langle x, y\rangle = \langle(1,3),(b,-2b)\rangle = -5b \to max$, a zatem $b \to min$, co razem z $b \in \left[-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right]$ daje $b = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Zatem $y_0 = (b, -2b) = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ i funkcjonał maksymalizujący dany jest wzorem $x_0^*(v) = \langle v, y_0\rangle = -\frac{1}{\sqrt{5}}v_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}v_2$, $v \in X$.
<u>Współliniowość</u>. Sprawdzimy, czy zachodzi $x_0^*(x - u_0) = ||x_0^*|| \cdot ||x - u_0||$, tzn. czy $\langle y_0, x - u_0\rangle = ||y_0|| \cdot ||x - u_0||$, gdzie $|| \cdot ||$ oznacza normę l^2. Ponieważ $y_0 = (-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$, $x = (1,3)$, $u_0 = (2,1)$, $x - u_0 = (-1,2)$, to:
Lewa $= \langle y_0, x - u_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} = 1 \cdot \sqrt{5} = ||y_0|| \cdot ||x - u_0|| =$Prawa.

b) Rozpatrzmy inny przypadek: $X = \mathbb{R}^2$ z normą l^4, $x = (1,2)$, $U = \{(a,a),\ a \in \mathbb{R}\} \subset X$.

<u>Zadanie pierwotne</u>. $\|x - u\|_4 = \left((1-a)^4 + (2-a)^4\right)^{\frac{1}{4}} \to \min$.
Niech $f(a) = (1-a)^4 + (2-a)^4$. Wtedy $0 = f'(a) = 2a^3 - 9a^2 + 15a - 9 = (2a-3)(a^2 - 3a + 3)$, $f''(a) > 0$, stąd $a = \frac{3}{2}$.

<u>Zadanie dualne</u>. Z Twierdzenia o reprezentacji funkcjonału na l^p: istnieje $y \in l^q$ że dla każdego $v \in l^p$ $x^*(v) = v_1y_1 + v_2y_2$.
W naszym przypadku $p = 4$, $q = \frac{4}{3}$.
Mamy warunki

1) $0 = x^*(u) = ay_1 + ay_2$, stąd $y = (-b, b)$,
2) $||x^*||_4 = ||y||_{\frac{4}{3}} \le 1$, stąd $y_1^{\frac{4}{3}} + y_2^{\frac{4}{3}} \le 1$,
3) $x^*(x) = x_1y_1 + x_2y_2 = y_1 + 2y_2 \to \max$.

Z 1) i 2) otrzymujemy $b \in \left[-\frac{1}{\sqrt[4]{8}}, \frac{1}{\sqrt[4]{8}}\right]$, a z 3) mamy $b \to \max$, zatem $b = \frac{1}{\sqrt[4]{8}}$ i dalej tak, jak w poprzednim przykładzie.

Zadanie 21. Korzystając z Twierdzenia o dualności, znajdź $u \in U$, takie że $\|x-u\| \to \min$, gdy

1. $X = \mathbb{R}^2$ z normą l^2, $x = (2,1)$, $U = \{(-a, 3a),\ a \in \mathbb{R}\} \subset X$; *Odp.* $u_0 = \left(-\frac{1}{10}, \frac{3}{10}\right)$, $x_0^*(v) = \frac{3}{\sqrt{10}} v_1 + \frac{1}{\sqrt{10}} v_2$,
2. $X = \mathbb{R}^2$ z normą l^4, $x = (4,1)$, $U = \{(a, -8a),\ a \in \mathbb{R}\} \subset X$. *Odp.* $u_0 = \left(\frac{2}{17}, -\frac{16}{17}\right)$, $x_0^*(v) = \left(\frac{16}{17}\right)^{3/4} v_1 + \left(\frac{1}{17}\right)^{3/4} v_2$.

W każdym przypadku sprawdź współliniowość odpowiednich elementów.

Przykład 11. *(Funkcjonał sprzężony do funkcjonału wypukłego)*
Wyznaczymy funkcjonał sprzężony $f^* : C^* \to \mathbb{R}$ do funkcjonału wypukłego $f : C \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $C = \mathbb{R}$.

Skorzystamy z faktu: jeżeli C–wypukły podzbiór przestrzeni unormowanej X, f–funkcjonał wypukły, to

$$C^* = \left\{ x^* \in X^* : \sup_{x \in C} \{\langle x, x^* \rangle - f(x)\} < \infty \right\}, \quad f^*(x^*) = \sup_{x \in C} \{\langle x, x^* \rangle - f(x)\}.$$

Mamy $C = \mathbb{R} = X$. Niech $x^* \in X^* = \mathbb{R}$ będzie ustalony.
Wtedy $h(x) := \langle x, x^* \rangle - f(x) = x^* x - x^2$. Wykres h to parabola skierowana w dół, więc h – ograniczony z góry.
Obliczamy $h'(x) = x^* - 2x$ oraz $h'(x) = 0$ wtw, gdy $x = \frac{1}{2} x^*$. Dalej mamy $h(x) = h\left(\frac{1}{2} x^*\right) = \frac{1}{4}(x^*)^2$ oraz $C^* = \mathbb{R}$. Zatem

$$f^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f^*(x^*) = \frac{1}{4}(x^*)^2.$$

Przykład 12. *(Funkcjonał sprzężony do funkcjonału wklęsłego)*
Wyznaczymy funkcjonał sprzężony $g^* : D^* \to \mathbb{R}$ do funkcjonału wklęsłego $g : D \to \mathbb{R}$ danego wzorem

$$g(x) = a\sqrt{x}, \quad a > 0, \quad D = [0, \infty).$$

Jeżeli D–wypukły podzbiór przestrzeni unormowanej X, g–funkcjonał wklęsły, to

$$D^* = \left\{ x^* \in X^* : \inf_{x \in D} \{\langle x, x^* \rangle - g(x)\} > -\infty \right\}, \quad g^*(x^*) = \inf_{x \in D} \{\langle x, x^* \rangle - g(x)\}.$$

Badamy $h(x) := \langle x, x^* \rangle - g(x) = x^* x - a\sqrt{x}$.
Mamy $h(x) > -\infty$ wtw, gdy $x^* > 0$. Stąd $D^* = (0, \infty)$.
Dalej mamy $0 = h'(x) = x^* - \dfrac{a}{2\sqrt{x}}$, skąd otrzymujemy $x = \dfrac{a^2}{4(x^*)^2}$ oraz $h\left(\dfrac{a^2}{4(x^*)^2}\right) = \dfrac{-a^2}{4x^*}$. Zatem

$$g^* : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad g^*(x^*) = -\frac{a^2}{4x^*}.$$

Zadanie 22. Pokaż, że funkcjonał sprzężony $g^* : D^* \to \mathbb{R}$ do funkcjonału $g : D \to \mathbb{R}$, $g(x) = x$, $D = [0, \infty)$ dany jest wzorem $g^*(x^*) = 0$, $D^* = (1, \infty)$.

Przykład 13. *(Lokata)* Za pomocą funkcjonałów dualnych rozwiążemy problem lokaty kapitału, jeżeli zysk powstały w wyniku działania i-tej akcji wynosi

$$g_i(x_i) = a_i \sqrt{x_i}, \quad a_i > 0, \quad i = 1, \ldots, n, \quad n \geq 2,$$

a posiadany kapitał jest równy $x_0 > 0$.

1. Formułujemy zadanie optymalizacji: $g(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x_i) \to \max$ pod warunkiem $\sum_{i=1}^{n} x_i = x_0$, $x_i \geq 0$.
2. Definiujemy następujące zbiory i funkcjonały

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i = x_0 \right\}, \quad f : C \to \mathbb{R}, \ f(x) = 0,$$

$$D = \{ x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0 \}, \qquad g : D \to \mathbb{R}, \ g(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x_i).$$

3. Korzystamy z Twierdzenia Fenchela o dualności

$$\begin{aligned}\sup_{x\in C\cap D} g(x) &= -\inf_{x\in C\cap D}\{-g(x)\} = -\inf_{x\in C\cap D}\{f(x)-g(x)\}\\ &= -\max_{x^*\in C^*\cap D^*}\{g^*(x^*)-f^*(x^*)\} = \min_{x^*\in C^*\cap D^*}\{f^*(x^*)-g^*(x^*)\}.\end{aligned} \tag{1}$$

4. Wyznaczamy funkcjonał sprzężony do f. Nierówność

$$\sup_{x\in C}\{\langle x,x^*\rangle - f(x)\} = \sup_{x\in C}\{\langle x,x^*\rangle\} = \sup_{x\in C}\sum_{i=1}^n x_i^* x_i \ < \infty,$$

gdzie $\sum_{i=1}^n x_i = x_0$, zachodzi tylko dla x^* postaci $x^* = (\lambda,\lambda,\ldots,\lambda) = \lambda(1,1,\ldots,1) =: \lambda\cdot\mathbf{1}$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Wtedy

$$f^* : C^*\to\mathbb{R},\quad C^* = \{\lambda\cdot\mathbf{1}, \lambda\in\mathbb{R}\},\quad f^*(\lambda) = \lambda x_0.$$

5. Wyznaczamy funkcjonał sprzężony do g. Z Przykładu 12 mamy $g_i^* : (0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g_i^*(x_i^*) = -\frac{a_i^2}{4x_i^*}$. Zatem

$$g^*(x^*) = \sum_{i=1}^n g_i^*(x_i^*) = -\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{4x_i^*}.$$

6. Ponieważ $C^* = \{\lambda\cdot\mathbf{1}, \lambda\in\mathbb{R}\}$ i $D^* = (0,\infty)$, to $C^*\cap D^* = \{\lambda\cdot\mathbf{1}, \lambda>0\}$ oraz

$$g^*(x^*) = -\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{4x_i^*} = -\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{4\lambda} = -\frac{1}{4\lambda}\sum_{i=1}^n a_i^2 = -\frac{\|a\|^2}{4\lambda}.$$

7. Podstawiamy otrzymane wyniki do (1).

$$\sup_{x\in C\cap D} g(x) = \min_{x^*\in C^*\cap D^*}\{f^*(x^*)-g^*(x^*)\} = \min_{\lambda>0}\left\{\lambda x_0 + \frac{\|a\|^2}{4\lambda}\right\}$$

8. Badamy $h(\lambda) := \lambda x_0 + \frac{\|a\|^2}{4\lambda}$. Mamy

$$0 = h'(\lambda) = x_0 - \frac{\|a\|^2}{4\lambda^2} \quad\Leftrightarrow\quad \lambda = \frac{\|a\|}{2\sqrt{x_0}};\qquad \text{oraz}\qquad h\left(\frac{\|a\|}{2\sqrt{x_0}}\right) = \|a\|\sqrt{x_0}\ \text{ – maksymalny zysk.}$$

Sprawdzając, że $\lim_{\lambda\to 0^+} h(\lambda) = \infty$, $\lim_{\lambda\to\infty} h(\lambda) = \infty$ upewniamy się, że rzeczywiście h osiąga minimum w $\frac{\|a\|}{2\sqrt{x_0}}$.

9. Wyznaczymy x_i, $i=1,\ldots,n$, $n\geq 2$. Skorzystamy z drugiej tezy Twierdzenia Fenchela.
Niech $\widetilde{x}\in C\cap D$ realizuje infimum w (1). Ponadto mamy $\widetilde{x}^* = \lambda\cdot\mathbf{1}$. Wtedy

$$\min_{x\in D}\{\langle x,\widetilde{x}^*\rangle - g(x)\} = \min_{x\geq 0}\{\langle x,\widetilde{x}^*\rangle - g(x)\} = \min_{x_i\geq 0}\left\{\sum_{i=1}^n \widetilde{x}_i{}^* x_i - \sum_{i=1}^n a_i\sqrt{x_i}\right\} = \min_{x_i\geq 0}\left\{\sum_{i=1}^n (x_i\lambda - a_i\sqrt{x_i})\right\}.$$

Mamy $h_i(x_i) := x_i\lambda - a_i\sqrt{x_i} = x_i\cdot\frac{\|a\|}{2\sqrt{x_0}} - a_i\sqrt{x_i}$ oraz $0 = h_i'(x_i) = \frac{\|a\|}{2\sqrt{x_0}} - \frac{a_i}{2\sqrt{x_i}} \ \Leftrightarrow\ x_i = \frac{a_i^2 x_0}{\|a\|^2}$.

Zatem $\widetilde{x}_i := \frac{a_i^2 x_0}{\|a\|^2}$ jest optymalną inwestycją, która daje maksymalny zysk równy $g(\widetilde{x}) = \|a\|\sqrt{x_0}$.

10. Sprawdzenie:

$$g(\widetilde{x}) = \sum_{i=1}^n g_i(\widetilde{x}_i) = \sum_{i=1}^n a_i\sqrt{\widetilde{x}_i} = \sum_{i=1}^n a_i\sqrt{\frac{a_i^2 x_0}{\|a\|^2}} = \sum_{i=1}^n a_i\frac{a_i\sqrt{x_0}}{\|a\|} = \frac{\sqrt{x_0}}{\|a\|}\sum_{i=1}^n a_i^2 = \frac{\sqrt{x_0}}{\|a\|}\cdot\|a\|^2 = \|a\|\sqrt{x_0}.$$

Zadanie 23. Za pomocą funkcjonałów dualnych rozwiąż problem lokaty kapitału dla dwóch akcji, jeżeli zysk powstały w wyniku działania i-tej akcji wynosi

$$g_1(x_1) = 3\sqrt{x_1},\quad g_2(x_2) = 4\sqrt{x_2},$$

a posiadany kapitał jest równy $x_0 = 200$.

Odp. $x_1 = 72$, $x_2 = 128$.

Zadanie 24. Za pomocą funkcjonałów dualnych rozwiąż problem lokaty kapitału dla dwóch akcji, jeżeli zysk powstały w wyniku działania i-tej akcji wynosi

$$g_1(x_1) = x_1, \quad g_2(x_2) = 2\sqrt{x_2},$$

a posiadany kapitał jest równy $x_0 = 100$.

Odp. $x_1 = 1$, $x_2 = 99$.

Przykład 14. *(Wyścigi i zakłady)* W wyścigu bierze udział n koni, i-ty koń wygrywa z prawdopodobieństwem p_i. Mamy do postawienia x_0 zł. Pozostali uczestnicy zakładów stawiają s_i zł na i-tego konia, a organizatorzy pobierają część $1-\theta$ sumy zakładów, $\theta \in (0,1)$. My stawiamy x_i na i-tego konia. Wówczas (o ile ten koń wygra) uzyskamy

$$\theta \left[x_0 + \sum_{j=1}^{n} s_j \right] \frac{x_i}{s_i + x_i}.$$

Przewidywany zysk wynosi

$$Z = \theta \left[x_0 + \sum_{j=1}^{n} s_j \right] \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i x_i}{s_i + x_i} - x_0.$$

Zadanie:

$$Z \to \max \quad \text{pod warunkiem} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = x_0, \ x_i \geq 0.$$

Wystarczy (pod tym warunkiem) maksymalizować

$$\sum_{i=1}^{n} g_i(x_i), \qquad g_i(x_i) = \frac{p_i x_i}{s_i + x_i}.$$

Tak jak poprzednio definiujemy zbiory i funkcjonały

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i = x_0 \right\}, \quad f : C \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 0, \qquad D = \{ x \in \mathbb{R}^n : \ x \geq 0 \}, \quad g : D \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x_i).$$

Mamy

$$C^* = \{ \lambda \cdot \mathbf{1}, \lambda \in \mathbb{R} \}, \quad D^* = (0, \infty), \quad C^* \cap D^* = \{ \lambda \cdot \mathbf{1}, \lambda > 0 \}.$$

Z Twierdzenia Fenchela o dualności

$$\sup_{x \in C \cap D} g(x) = \min_{x^* \in C^* \cap D^*} \{ f^*(x^*) - g^*(x^*) \} = \min_{\lambda > 0} \{ f^*(\lambda) - g^*(\lambda) \} .$$

Wiemy, że $f^*(\lambda) = \lambda x_0$. Ponieważ funkcja g_i jest wklęsła, funkcjonał sprzężony do g_i definiujemy następująco

$$g_i^*(\lambda) = \begin{cases} \text{nieokreślone}, & \lambda < 0, \\ \min_{x_i > 0} \left[\lambda x_i - g_i(x_i) \right], & 0 < \lambda < \frac{p_i}{s_i}, \\ 0, & \lambda \geq \frac{p_i}{s_i}. \end{cases} \tag{2}$$

Minimum jest osiągane dla

$$\lambda = \frac{s_i p_i}{(s_i + x_i)^2}, \tag{3}$$

Stąd

$$x_i = -s_i + \sqrt{\frac{s_i p_i}{\lambda}}. \tag{4}$$

Wstawiając (3) do (2), otrzymujemy

$$g_i^*(\lambda) = \begin{cases} -\frac{p_i x_i^2}{(s_i + x_i)^2}, & 0 < \lambda < \frac{p_i}{s_i} \\ 0, & \lambda \geq \frac{p_i}{s_i} \end{cases} \tag{5}$$

Następnie do (5) wstawiamy (4), otrzymując

$$g_i^*(\lambda) = \begin{cases} -(\sqrt{\lambda s_i} + \sqrt{p_i})^2, & 0 < \lambda < \frac{p_i}{s_i} \\ 0, & \lambda \geq \frac{p_i}{s_i} \end{cases}$$

Zatem

$$\sup_{x \in C \cap D} g(x) = \min_{\lambda > 0} \left\{ \lambda x_0 + \sum_{\frac{p_i}{s_i} \geq \lambda} (\sqrt{\lambda s_i} + \sqrt{p_i})^2 \right\}$$

Załóżmy (dla prostoty), że wartości $\dfrac{p_i}{s_i}$ są różne.

Rozwiązanie x ma współrzędne

$$x_i = \begin{cases} -s_i + \sqrt{\frac{s_i p_i}{\lambda}} & \text{dla } i \text{ spełniających } \frac{p_i}{s_i} \geq \lambda \\ 0 & \text{dla pozostałych } i \end{cases}$$

Parametr λ jest dobrany tak, aby

$$\sum_{\frac{p_i}{s_i} \geq \lambda} \left(-s_i + \sqrt{\frac{s_i p_i}{\lambda}} \right) = x_0.$$

Taka wartość istnieje, bo ta funkcja jest ciągła i przyjmuje wartości od ∞ do 0 dla $\lambda \in (0, \infty)$.

Zadanie 25. W wyścigu biorą udział dwa konie, które wygrywają z równym prawdopodobieństwem. Mamy do postawienia $x_0 = 100$ zł, pozostali uczestnicy zakładów stawiają na pierwszego konia 400 zł, na drugiego 600 zł, a organizatorzy pobierają 20% sumy zakładów ($\theta = 80\%$). Oblicz, ile należy postawić na pierwszego konia, a ile na drugiego, aby zmaksymalizować wygraną.

Odp. $x_1 = 94.44,\ \ x_2 = 5.56,\ \ Z \approx -11.92.$

Zadanie 26. W wyścigu biorą udział dwa konie, które wygrywają z prawdopodobieństwem 0.4 i 0.6. Mamy do postawienia $x_0 = 50$ zł, pozostali uczestnicy zakładów stawiają na pierwszego konia 100 zł, na drugiego 300 zł, a organizatorzy pobierają 10% sumy zakładów. Oblicz, ile należy postawić na pierwszego konia, a ile na drugiego, aby zmaksymalizować wygraną.

Odp. $x_1 = 44.2,\ \ x_2 = 5.8,\ \ Z \approx 4.3.$

Przykład 15. *(Różniczka Gateaux i różniczka Frécheta)*

Załóżmy, że X, Y przestrzenie unormowane, $D \subset X$ otwarty oraz $T : D \to Y$. Niech $h \in X$ będzie dopuszczalnym przyrostem dla $x_0 \in D$. Jeżeli istnieje granica

$$\delta T_{x_0}(h) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{T(x_0 + \alpha h) - T(x_0)}{\alpha},$$

to nazywamy ją *różniczką Gateaux* odwzorowania T w punkcie x_0 dla przyrostu h.

Gdy T jest funkcjonałem tzn. $T : D \to \mathbb{R}$, to

$$\delta T_{x_0}(h) = g'(0), \quad \text{gdzie } \ g(\alpha) = T(x_0 + \alpha h). \tag{6}$$

Obliczymy różniczką Gateaux funkcjonału $f : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ danego wzorem $f(x) = x^2\left(\frac{1}{2}\right)$. Mamy

$$g(\alpha) = (x_0 + \alpha h)^2 \left(\frac{1}{2}\right) = \left[x_0 \left(\frac{1}{2}\right) + \alpha h \left(\frac{1}{2}\right) \right]^2 \quad \text{oraz} \quad g'(\alpha) = 2 \left[x_0 \left(\frac{1}{2}\right) + \alpha h \left(\frac{1}{2}\right) \right] h \left(\frac{1}{2}\right).$$

Zatem

$$\delta f_{x_0}(h) = g'(0) = 2x_0 \left(\frac{1}{2}\right) h \left(\frac{1}{2}\right).$$

Pokażemy teraz, że otrzymana różniczka Gateaux jest też różniczką Frécheta. Przypomnijmy definicję.

Niech X, Y będą przestrzeniami unormowanymi, $D \subset X$ otwarty, $T : D \to Y$. *Różniczką Frécheta* odwzorowania T w punkcie $x \in D$ nazywamy odwzorowanie liniowe, ciągłe $\partial T_x : X \to Y$, jeżeli dla każdego $h \in X$

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|T(x+h) - T(x) - \partial T_x(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Odwzorowanie $\delta f_x(h) = 2x\left(\frac{1}{2}\right) h \left(\frac{1}{2}\right)$ jest ciągłe, można pokazać, że jest też liniowe. Obliczamy

$$\frac{\|f(x+h) - f(x) - \partial f_x(h)\|}{\|h\|} = \frac{\left|(x+h)^2(\frac{1}{2}) - x^2(\frac{1}{2}) - 2x(\frac{1}{2})h\left(\frac{1}{2}\right)\right|}{\|h\|} = \frac{\left|h^2\left(\frac{1}{2}\right)\right|}{\|h\|} \leq \frac{\|h\|^2}{\|h\|} = \|h\| \to 0, \quad \text{gdy } \|h\| \to 0.$$

Zadanie 27. Oblicz różniczkę Gateaux funkcjonału $f : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ danego wzorem

1. $f(x) = x^k(t_0), \quad t_0 \in [0,1]$
2. $f(x) = x\left(\frac{1}{2}\right) x\left(\frac{1}{3}\right)$
3. $f(x) = x(0) \sin^2 x(1)$
4. $f(x) = \int_0^1 x^3(t)\, dt$
5. $f(x) = x(0) \int_0^1 \cos^2 x(t)\, dt$
6. $f(x) = \int_0^1 e^{2x(t)x(0)}\, dt$

Pokaż, że różniczka Gateaux funkcjonału w przykładzie 2. jest również różniczką Frécheta.

Zadanie 28. Oblicz różniczkę Gateaux funkcjonału $f : H \to \mathbb{R}$, H - unitarna, danego wzorem $f(x) = \|x\|^2$. Pokaż, że jest ona również różniczką Frécheta.

Zadanie 29. Zadanie planowania inwestycji polega na maksymalizacji funkcjonału

$$f(x) = \int_0^T e^{-\beta t} U(\alpha x(t) - x'(t))\, dt$$

opisującego zysk w czasie od 0 do T przy warunkach $x(0) = x_0,\ x(T) = 0,\ x(t) \geq 0$, gdzie

x_0 - kapitał początkowy,
$x(t)$ - kapitał całkowity w chwili t,
$r(t)$ - wydatki w chwili t,
$U(r)$ - zysk zależny od wydatków r (zakładamy, że U jest funkcją wklęsłą),
α - stopa inwestycji,
$e^{-\beta t}$ - czynnik dyskontujący.

Zauważmy, że prawo opisujące zmianę x dane jest równaniem $x'(t) = \alpha x(t) - r(t)$, tzn. wzrost kapitału jest proporcjonalny do inwestycji minus poniesione wydatki.

Niech $D = \{x \in C^1[0,T] \ : \ x \geq 0,\ \alpha x - x' \geq 0,\ x(0) = x_0,\ x(T) = 0\}$.

1. Pokaż, że różniczka Gateaux funkcjonału f w $x \in C^1[0,T]$ jest równa

$$\delta f_x(h) = \int_0^T e^{-\beta t} U'(\alpha x(t) - x'(t))(\alpha h(t) - h'(t))\, dt, \quad h \in C^1[0,T].$$

2. Pokaż, że ponieważ h ma być przyrostem dopuszczalnym dla $x \in D$, to zakładamy $h(0) = h(T) = 0$.

3. Wykaż, że warunek konieczny istnienia ekstremum $\delta f_x(h) = 0$ prowadzi do równania

$$U'(r(t)) = U'(r(0))e^{(\beta-\alpha)t}.$$

W tym celu zastosuj całkowanie przez części do $\int_0^T e^{-\beta t} U'\big(\alpha x(t) - x'(t)\big)\, h'(t)\, dt$.

Następnie skorzystaj z metody czynnika całkującego.

4. Przyjmij funkcję użyteczności $U(r) = 2\sqrt{r}$ i pokaż, że

$$x(t) = x_0 e^{\alpha t} - r(0)\frac{e^{2(\alpha-\beta)t} - e^{\alpha t}}{\alpha - 2\beta}.$$

5. Przy założeniu $\frac{\alpha}{2} < \beta < \alpha$ pokaż, że wydatki początkowe dane są wzorem

$$r(0) = x_0 \frac{2\beta - \alpha}{1 - e^{(\alpha - 2\beta)T}}.$$