

Teoria opcji

Zad. 1. Znajdź cenę racjonalną wypłaty X .

Zad. 2. Niech $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$. Inwestor uważa, że prawdopodobieństwo wzrostu ceny akcji wynosi $P(\{\omega_1\}) = 0.2$, a spadku $P(\{\omega_2\}) = 0.8$. Akcja kosztująca teraz $S_0 = 260$ za 3 miesiące będzie miała cenę

$$S_T(\omega) = \begin{cases} 340, & \text{gdy } \omega = \omega_1, \\ 220, & \text{gdy } \omega = \omega_2. \end{cases}$$

1. Oblicz wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe ceny akcji w chwili T .
2. Niech stopa procentowa na depozyt 3-miesięczny wynosi $r = 1\%$. Wycen europejską opcję kupna z ceną wykonania $K = 280$ i momentem wygaśnięcia za 3 miesiące.
3. Niech stopa procentowa na depozyt 3-miesięczny wynosi $r = 1\%$. Wycen europejską opcję sprzedaży z ceną wykonania $K = 250$ i momentem wygaśnięcia za 3 miesiące.

$$C_T = (S_T - K)^+, \quad P_T = (K - S_T)^+,$$

$$B_0 = 1, \quad B_T = 1 + r, \quad r \geq 0, \quad S_0 = s > 0, \quad S_T(\omega) = \begin{cases} S^u, & \text{gdy } \omega = \omega_1, \\ S^d, & \text{gdy } \omega = \omega_2, \end{cases}$$

$$\varphi = (\beta_0, \alpha_0), \quad \alpha_0 = \frac{X^u - X^d}{S^u - S^d}, \quad \beta_0 = \frac{X^d S^u - X^u S^d}{(1+r)(S^u - S^d)}, \quad X^u = X(\omega_1), \quad X^d = X(\omega_2),$$

$$V_T(\varphi)(\omega_i) = X(\omega_i), \quad i = 1, 2, \quad V_t(\varphi) = \begin{cases} \alpha_0 S_0 + \beta_0, & \text{gdy } t = 0, \\ \alpha_0 S_T + \beta_0(1+r), & \text{gdy } t = T, \end{cases}$$

$$\Pi_0(X) = V_0(\varphi), \quad \varphi - \text{portfel replikujący.}$$

Zad. 3. Opisz postępowanie inwestora sprzedającego europejską opcję kupna i chcącego zabezpieczyć wypłatę z opcji. Co się dzieje, gdy opcja jest sprzedawana po cenie innej niż racjonalna?

Rozwiązanie:

1. W chwili $t = 0$ inwestor postępuje następująco:

Działanie	Rozliczenie
Sprzedaje jedną opcję	C_0
Kupuje α sztuk akcji	$-\alpha S_0$
Tworzy depozyt bankowy (ew. bierze kredyt)	$-\beta_0$.

Na mocy definicji racjonalnej ceny mamy $C_0 - \alpha S_0 - \beta_0 = 0$. Zatem koszt początkowy takiego postępowania inwestora sprzedającego opcję jest równy zeru.

2. W chwili $t = T$ inwestor postępuje następująco:

Działanie	Rozliczenie
Realizuje opcję	$-C_T$
Sprzedaje akcje	αS_T
Podje muje pieniądze z banku (ew. zwraca dług)	$(1+r)\beta_0$.

Rozliczenie końcowe $-C_T + \alpha S_T + (1+r)\beta_0 = 0$, czyli do tej transakcji nikt nie dołożył. Cena racjonalna wypłaty jest do zaakceptowania dla obu stron.

3. Gdyby opcja nie była sprzedawana po cenie C_0 , a po cenie $C \neq C_0$, to:

i. Gdy $C_0 < C$, sprzedający ma pewny zysk $C - C_0 > 0$ w chwili 0, gdyż wystarczy wydać C_0 , by zabezpieczyć wypłatę X dla kupującego, resztę sprzedający zachowuje dla siebie.

ii. Gdy $C_0 > C$ (koszt zabezpieczenia jest większy niż cena C), to kupujący ma pewny zysk $C_0 - C > 0$ w chwili 0, gdyż aby otrzymać wypłatę X musiałby wydać C_0 , a kupić ją za C .

W obu przypadkach, gdy $C \neq C_0$ (tj. cena różni się od ceny racjonalnej), znajdujemy portfel dający zysk bez żadnego ryzyka i zajmując odpowiednią pozycję mamy dodatni dochód.

Zad. 4. Znajdź przykład rynku i wypłaty $X > 0$, której cena racjonalna jest ujemna, tj. $\Pi_0(X) < 0$.

Rozwiązanie:

1. Skorzystamy ze wzoru z zadania 1.
2. Wiemy, że $X^u > 0$, $X^d > 0$, $r \geq 0$, $S^u > S^d$.
3. Aby $\Pi_0(X) < 0$, to musi być $(1+r)S_0 < S^d$ lub $S^u < S_0(1+r)$.
4. Niech zatem $S_0 = 10$, $r = 0,1$, $S^d = 12$, $S^u = 13$, $X^d = 5$, $X^u = 15$. Wtedy $\Pi_0(X) = -\frac{50}{11}$.
5. Na tym rynku możemy osiągnąć zysk bez ryzyka pożyczając 10 jednostek z banku i kupując za tę kwotę akcję. Wtedy w chwili T sprzedając akcję otrzymujemy co najmniej 12, a do banku musimy zwrócić 11. W tej sytuacji można by osiągnąć zysk bez ryzyka za pomocą odpowiedniej strategii.

Zad. 5. Cena początkowa akcji wynosi 20 zł a oprocentowanie depozytu (kredytu) po 6 miesiącach wynosi $r = 5\%$. Wiemy, że akcja po 6 miesiącach może kosztować 25 zł z prawdopodobieństwem $1/3$ i 18 zł z prawdopodobieństwem $2/3$. Oblicz racjonalną cenę europejskiej opcji sprzedaży z momentem wygaśnięcia 6 miesięcy i ceną wykonania 22 zł, znajdując strategię zabezpieczającą. Opisz, jakie działania na początku i na końcu okresu musi podjąć wystawca opcji sprzedaży, aby zabezpieczyć wypłatę.

Zad. 6. Cena początkowa akcji wynosi 170 zł a oprocentowanie depozytu (kredytu) po 4 miesiącach wynosi $r = 2\%$. Wiemy, że akcja po 4 miesiącach może kosztować 220 zł z prawdopodobieństwem $1/2$ i 160 zł z prawdopodobieństwem $1/2$. Oblicz racjonalną cenę europejskiej opcji kupna z momentem wygaśnięcia 4 miesiące i ceną wykonania 180 zł, znajdując strategię zabezpieczającą.

Zad. 7. Cena początkowa akcji wynosi 70 zł a oprocentowanie depozytu (kredytu) po 3 miesiącach wynosi $r = 3\%$. Wiemy, że akcja po 3 miesiącach może kosztować 65 zł z prawdopodobieństwem $1/5$ i 76 zł z prawdopodobieństwem $4/5$. Oblicz racjonalną cenę europejskiej opcji kupna i europejskiej opcji sprzedaży z momentem wygaśnięcia 3 miesiące i ceną wykonania 73 zł, znajdując strategię zabezpieczającą.