Zad. 8. Udowodnij, że na rynku bez możliwości arbitrażu cena racjonalna wypłaty nieujemnej jest nieujemna, czyli $\Pi_0(X) \geq 0$, gdy $X \geq 0$. Gdy ponadto $X \neq 0$, to $\Pi_0(X) > 0$.

Zad. 9. Niech na rynku $\mathcal{M} = (B, S, \Phi)$ bez możliwości arbitrażu, H będzie procesem ceny arbitrażowej wypłaty X, czyli $H_0 = \Pi_0(X)$, $H_T = X$. Niech Φ_H oznacza klasę portfeli składających się z jednostek rachunku bankowego, akcji i jednostek instrumentu pochodnego o cenie H. Udowodnij, że rynek $\widetilde{\mathcal{M}} = (B, S, H, \Phi_H)$, czyli rynek $\mathcal{M}$ rozszerzony o instrument pochodny, jest rynkiem bez możliwości arbitrażu.

Wskazówki:

1. Załóż nie wprost, że na rynku rozszerzonym $\widetilde{\mathcal{M}}$ występuje arbitraż, czyli istnieje portfel $\widetilde{\varphi} \in \Phi_H$, $\widetilde{\varphi} = (\beta, \alpha, \gamma)$, taki że
$$1.\ V_0(\widetilde{\varphi}) = 0, \qquad 2.\ \underset{\omega\in\Omega}{\forall}\ V_T(\widetilde{\varphi})(\omega) \geq 0, \qquad 3.\ \underset{\omega\in\Omega}{\exists}\ V_T(\widetilde{\varphi})(\omega) > 0.$$

2. Ponieważ $H_T = X$ oraz $H_0 = \Pi_0(X)$, to istnieje portfel $\varphi \in \Phi$, $\varphi = (\beta_0, \alpha_0)$, taki że
$$1.\ V_0(\varphi) = \Pi_0(X) = H_0, \quad 2.\ V_T(\varphi) = X = H_T.$$

3. Ze wskazówek 1.1 i 2.2 otrzymujemy portfel $\varphi_1 = (\beta + \gamma\beta_0, \alpha + \gamma\lambda_0) \in \Phi$ i pokazujemy, że jest on możliwością arbitrażu na rynku $\mathcal{M}$, co daje sprzeczność z założeniem.

Zad. 10. Załóżmy, ze akcja kosztująca 200 będzie za trzy miesiące miała cenę 150 lub 300, a stopa procentowa na depozyt trzymiesięczny jest równa 10%. Oblicz cenę europejskiej opcji sprzedaży z ceną wykonania 270 i terminem wykonania za trzy miesiące na dwa sposoby: za pomocą

1. portfela replikującego wypłatę P_T,
2. miary martyngałowej: $P_0 = \mathbb{E}_{P^*}\left[\dfrac{P_T}{1+r}\right]$.

Zad. 11. Udowodnij, że jeżeli istnieje portfel φ, taki że $V_0(\varphi) < 0$ oraz $V_T(\varphi) \geq 0$, to na rynku istnieje arbitraż.

Wskazówka: Pokaż, że portfel $\psi = (\beta - V_0(\varphi), \alpha)$ jest tym arbitrażem.

Zad. 12. (*Prawo jednej ceny*) Udowodnij, ze na rynku jednookresowym dwustanowym bez możliwości arbitrażu dwa portfele mające tę samą wartość w chwili T muszą mieć tę samą wartość w chwili 0.

Zad. 13. Udowodnij parytet kupna-sprzedaży $C_0 - P_0 = S_0 - \dfrac{K}{1+r}$, korzystając z

a) argumentów arbitrażowych, b) prawa jednej ceny.

Rozwiązanie:

a) Załóżmy nie wprost, że $C_0 - P_0 > S_0 - \dfrac{K}{1+r}$. Wtedy strategia polegająca na kupnie akcji i opcji sprzedaży z ceną wykonania K i sprzedaniu opcji kupna z ceną wykonania K jest strategią arbitrażową. Wartość tej operacji (równej $C_0 - P_0 - S_0$) rozliczamy w banku (gdy jest ona dodatnia, to wkładamy tę sumę do banku, gdy ujemna, to pożyczamy ją z banku). W chwili T zawsze mamy zysk równy
$$K + (1+r)(C_0 - P_0 - S_0) > 0.$$

b) Portfel φ składający się z jednej akcji i pożyczki w wysokości $\dfrac{K}{1+r}$ i portfel ψ powstały w wyniku zakupu opcji kupna i sprzedaży opcji sprzedaży o tej samej cenie wykonania K mają w chwili T tę samą wartość $S_T - K$, więc muszą mieć tę samą wartość w chwili zero, co daje parytet.

Zad. 14. Znajdź na rynku jednookresowym dwustanowym wzory ogólne na ceny europejskich opcji kupna i sprzedaży przy założeniu $S^d \leq K \leq S^u$.

Wskazówka: Skorzystaj z Zadania 1.