**Zad. 15.** Uzasadnij następujące ograniczenia na ceny opcji na rynku bez możliwości arbitrażu:

$$a) \quad \left(S_0 - \frac{K}{1+r}\right)^+ \le C_0 \le S_0,$$
$$b) \quad \left(\frac{K}{1+r} - S_0\right)^+ \le P_0 \le \frac{K}{1+r}.$$

*Wskazówka*: Skorzystaj z parytetu kupna-sprzedaży i twierdzenia o monotoniczności ceny.

**Rynki skończone**

**Zad. 16.** Na podstawie tabeli przedstawiającej możliwe ceny akcji po kolejnych okresach inwestycyjnych podaj filtrację $(\mathcal{F}_t, t \in \{0, 1, \ldots, T\})$.

| $\omega_j$ | $t=0$ | $t=1$ | $t=2$ | $t=3$ |
|---|---|---|---|---|
| $\omega_1$ | $S_0=2$ | $S_1=5$ | $S_2=8$ | $S_3=9$ |
| $\omega_2$ | $S_0=2$ | $S_1=5$ | $S_2=7$ | $S_3=8$ |
| $\omega_3$ | $S_0=2$ | $S_1=1$ | $S_2=3$ | $S_3=5$ |
| $\omega_4$ | $S_0=2$ | $S_1=1$ | $S_2=6$ | $S_3=5$ |
| $\omega_5$ | $S_0=2$ | $S_1=1$ | $S_2=3$ | $S_3=7$ |

**Zad. 17.** Sprawdź, czy zmienne losowe $X$ i $Y$ są $\mathcal{F}$-mierzalne, jeżeli

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{\omega_1, \omega_2, \omega_6, \omega_8\}, \{\omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_7\}\},$$
$$X(\omega) = \begin{cases} 10, & \omega = \omega_1, \omega_2, \omega_6, \omega_8, \\ 20, & \omega = \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_7, \end{cases} \qquad Y(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega = \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_8, \\ 5, & \omega = \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \end{cases}$$

Zmienna losowa $X$ jest $\mathcal{F}$-**mierzalna**, jeżeli dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zbiór $\{\omega \in \Omega : \ X(\omega) = x\}$ jest elementem $\sigma$-ciała $\mathcal{F}$.

**Zad. 18.** Udowodnij, że portfel stały jest strategią samofinansującą się.

**Zad. 19.** Udowodnij

$$\varphi - \text{ samofinansujący się} \quad \Longleftrightarrow \quad V_{t+1}(\varphi) - V_t(\varphi) = \varphi_{t+1}(S_{t+1} - S_t) \ \text{ dla każdego } t$$
$$\Longleftrightarrow \quad (\varphi_{t+1} - \varphi_t)S_t = 0 \ \text{ dla każdego } t.$$

**Zad. 20.** Udowodnij, że strategia $\varphi$ polegająca na kupieniu za własne pieniądze $i$-tej akcji w chwili 0, sprzedaniu jej w ustalonej chwili czasu $\tau$, $\tau < T$ i włożeniu uzyskanych pieniędzy do banku jest samofinansująca się.

**Zad. 21.** Udowodnij, że na rynku istnieje możliwość arbitrażu wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje portfel samofinansujący się $\varphi$ spełniający

$$P\left(V_T^*(\varphi) \ge V_0(\varphi)\right) = 1, \qquad P\left(V_T^*(\varphi) > V_0(\varphi)\right) > 0.$$

**Zad. 22.** Udowodnij, że gdy istnieje strategia $\varphi$ spełniająca

$$V_0(\varphi) < 0, \qquad V_T(\varphi)(\omega) \ge 0 \ \text{ dla każdego } \omega,$$

to istnieje arbitraż.

**Zad. 23.** *(Prawo jednej ceny)* Udowodnij, że na rynku bez możliwości arbitrażu portfele mające tę samą wartość w chwili $T$ muszą mieć tę samą wartość w chwili 0 (czyli muszą mieć tę samą cenę).

*Wskazówka*: Załóż nie wprost, że $V_0(\varphi) < V_0(\psi)$ i pokaż, że $\xi = \varphi - \psi$ jest arbitrażem.

**Zad. 24.** Udowodnij, że gdy na rynku $(S, \Phi)$ bez możliwości arbitrażu $S^0$, $S^1$ są aktywami bez ryzyka (tzn. $S_t^0 = (1+r)^t$ oraz $S_t^1 = (1+r_1)^t$), to $S^0 = S^1$.

*Wskazówka*: Załóż nie wprost, że $r < r_1$ i pokaż, że istnieje arbitraż; podobnie dla $r > r_1$.

**Zad. 25.** Podaj przykład rynku bez możliwości arbitrażu i dwóch różnych strategii samofinansujących się o tej samej wartości w chwili końcowej $T$.