

Zad. 26. Rozpatrzmy rynek jednookresowy ($T = 1$) z trzema możliwymi zdarzeniami losowymi. Inwestor uważa, że są one jednakowo prawdopodobne. Na rynku stopa procentowa bez ryzyka wynosi 20% i jest jedna akcja mająca proces cen

$$S_0 = 25, \quad S_1(\omega_1) = 20, \quad S_1(\omega_2) = 40, \quad S_1(\omega_3) = 35.$$

Czy wszystkie wypłaty są na tym rynku osiągalne?

Zad. 27. Rozpatrzmy rynek jednookresowy ($T = 1$) z trzema możliwymi zdarzeniami losowymi. Inwestor uważa, że są one jednakowo prawdopodobne. Na rynku stopa procentowa bez ryzyka wynosi 0% i są dwie akcje mające procesy cen

$$\begin{aligned} S_0^1 &= 4, & S_1^1(\omega_1) &= 8, & S_1^1(\omega_2) &= 6, & S_1^1(\omega_3) &= 3, \\ S_0^2 &= 7, & S_1^2(\omega_1) &= 10, & S_1^2(\omega_2) &= 8, & S_1^2(\omega_3) &= 4. \end{aligned}$$

Podaj przykład strategii dominującej (patrz zadanie 22).

Zad. 28. Rozpatrzmy rynek jednookresowy z trzema możliwymi zdarzeniami losowymi. Na rynku stopa procentowa bez ryzyka wynosi 20% i jest jedna akcja mająca proces cen:

$$S_0^1 = 30, \quad S_1^1(\omega_1) = 20, \quad S_1^1(\omega_2) = 40, \quad S_1^1(\omega_3) = 35.$$

Zbadaj, czy na tym rynku istnieje arbitraż.

Wskazówka: Zbadaj, czy istnieje miara martyngałowa Q , tzn. q_1, q_2, q_3 , takie że $\mathbb{E}_Q[S_1] = S_0(1+r)$, $q_1 + q_2 + q_3 = 1$, $q_i > 0$, $i = 1, 2, 3$.

Zad. 29. Do rynku z poprzedniego zadania dodajemy jeszcze jedną akcję

$$S_0^2 = 30, \quad S_1^2(\omega_1) = 25, \quad S_1^2(\omega_2) = 50, \quad S_1^2(\omega_3) = 35.$$

Zbadaj, czy taki rynek jest bez arbitrażu.

Zad. 30. Znajdź wszystkie miary martyngałowe i wypłaty osiągalne ewentualnie strategie arbitrażowe, gdy rynek jest jednookresowy z trzema możliwymi zdarzeniami losowymi i z aktywami opisanymi w następujący sposób:

1. Stopa procentowa bez ryzyka wynosi 10% i na rynku jest jedna akcja opisana przez

$$S_0 = 20, \quad S_1(\omega_1) = 25, \quad S_1(\omega_2) = 40, \quad S_1(\omega_3) = 22.$$

2. Stopa procentowa bez ryzyka wynosi 10% i na rynku są dwie akcje przyjmujące wartości:

$$\begin{aligned} S_0^1 &= 2, & S_1^1(\omega_1) &= 1, & S_1^1(\omega_2) &= 3, & S_1^1(\omega_3) &= 2, \\ S_0^2 &= 5, & S_1^2(\omega_1) &= 3, & S_1^2(\omega_2) &= 6, & S_1^2(\omega_3) &= 8. \end{aligned}$$

Zad. 31. Załóżmy, że rynek jednookresowy jest bezarbitrażowy. Udowodnij, że rynek jest zupełny wtedy i tylko wtedy, gdy liczba stanów Ω (czyli scenariuszy) jest równa liczbie liniowo niezależnych wektorów wśród wektorów B_1, S_1^1, \dots, S_1^k .

Wskazówka: Rozpatrz macierz

$$A = \begin{bmatrix} B_1(\omega_1) & S_1^1(\omega_1) & \dots & S_1^k(\omega_1) \\ B_1(\omega_2) & S_1^1(\omega_2) & \dots & S_1^k(\omega_2) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ B_1(\omega_d) & S_1^1(\omega_d) & \dots & S_1^k(\omega_d) \end{bmatrix}$$

oraz rozwiązania równania $A\varphi = x$ dla dowolnego x .

Zad. 32. Zbadaj zupełność rynku z zadań 28 i 30.2, korzystając z zadania 31.