Zad. 33. Tabela przedstawia możliwe ceny akcji po kolejnych okresach inwestycyjnych

ω_j	$t=0$	$t=1$	$t=2$
ω_1	$S_0=5$	$S_1=8$	$S_2=9$
ω_2	$S_0=5$	$S_1=8$	$S_2=6$
ω_3	$S_0=5$	$S_1=4$	$S_2=6$
ω_4	$S_0=5$	$S_1=4$	$S_2=3$

Załóżmy, że scenariusze są jednakowo prawdopodobne a stopa procentowa bez ryzyka jest równa 10%. Oblicz

1. $P(S_2=9|S_1=8)$,
2. $P(S_2=6|S_1=8)$,
3. $\mathbb{E}[S_2|S_1=8]$,
4. $\mathbb{E}[S_2|S_1=4]$,
5. $\mathbb{E}[S_2|\mathcal{F}_1]$.

Znajdź miarę martyngałową i oblicz ceny europejskich opcji kupna i sprzedaży, gdy $K=7$, $r=10\%$.

Odp. 1. 0.5, 2. 0.5, 3. 7.5, 4. 4.5, 6. $P(\{\omega_1\})=0.35$, $P(\{\omega_2\})=0.025$, $P(\{\omega_3\})=0.292$, $P(\{\omega_4\})=0.333$, $C_0=0.58$, $P_0=1.36$.

Zad. 34. Na rynku dwuokresowym ($T=2$) o czterech możliwych scenariuszach stopa procentowa bez ryzyka wynosi 10% i jest jedna akcja, której ceny są opisane przez proces S:

$$S_0=100,\quad S_1(\omega_1)=S_1(\omega_2)=120,\quad S_1(\omega_3)=S_1(\omega_4)=80,$$
$$S_2(\omega_1)=140,\quad S_2(\omega_2)=S_2(\omega_3)=100,\quad S_2(\omega_4)=60.$$

Znajdź ceny europejskich opcji kupna i sprzedaży z ceną wykonania $K=105$.

Odp. $P(\{\omega_1\})=0.6$, $P(\{\omega_2\})=0.15$, $P(\{\omega_3\})=0.175$, $P(\{\omega_4\})=0.075$, $C_0=17.36$, $P_0=4.13$.

Model Coxa-Rossa-Rubinsteina

Zad. 35. Niech w modelu CRR: $S_0=100,\quad S_1=80,\quad S_1=130,\quad T=2,\quad r=0.1$.
Wyceń europejskie opcje kupna i sprzedaży z ceną wykonania 90.

Zad. 36. Znajdź wzór na cenę arbitrażową europejskiej opcji sprzedaży w modelu CRR.

Zad. 37. Niech w modelu CRR: $S_0=100,\quad S_1=120,\quad S_1=90,\quad T=3,\quad r=0.05$.
Wyceń opcję europejską o wypłacie $X=100(R_T-0.1)^+$, gdzie $R_T=\frac{S_T-S_0}{S_0}$ jest stopą zwrotu z akcji w czasie od 0 do T.

Zad. 38. Udowodnij, że portfel replikujący wypłatę postaci $X=h(S_T)$ w chwili t ma postać

$$\varphi_t^1=\frac{f(t,S_{t-1}(1+b))-f(t,S_{t-1}(1+a))}{S_{t-1}(b-a)},$$
$$\varphi_t^0=\frac{(1+b)f(t,S_{t-1}(1+a))-(1+a)f(t,S_{t-1}(1+b))}{(b-a)(1+r)^t}.$$

Wskazówki:
1. W chwili t musi zachodzić $(1+r)^{t-T}\,\mathbb{E}[h(S_T)|\mathcal{F}_t]=V_t(\varphi)=\varphi_t^0(1+r)^t+\varphi_t^1 S_t$.
2. $S_T=S_tZ_t$, $Z_t=\Pi_{j=t+1}^T U_j$, a zatem $V_t(\varphi)=(1+r)^{t-T}\,\mathbb{E}[h(xZ_t)]\big|_{x=S_t}=f(t,S_t)$.
3. Z 1. i 2. mamy: $\varphi_t^1 S_{t-1}U_t=f(t,S_{t-1}U_t)-(1+r)^t\varphi_t^0$ oraz U_t przyjmuje wartości $1+a$ i $1+b$. Stąd wyznaczamy φ_t^1 i φ_t^0.

Zad. 39. Niech w modelu CRR: $S_0=100,\quad u=1+b=1.2,\quad d=1+a=0.7,\quad T=2$.
1. Dla jakich wartości stopy procentowej r model jest wolny od arbitrażu? Wyznacz dla tych wartości miarę martyngałową.
2. Niech $r=10\%$. Znajdź cenę arbitrażową europejskich wypłat:

$$X=(\min(S_1,S_2)-90)^+,\qquad Y=(S_2-S_1-10)^+.$$

Odp: 1. $r\in(0,0.2)$, $p=2r+0.6$ 2. $p=0.8$, $\Pi_0(X)=15.87$, $\Pi_0(Y)=7.93$.

Zad. 40. Niech w modelu CRR: $S_0=80,\quad u=1.3,\quad T=3,\quad r=0.2$.
1. Dla jakich d model jest wolny od arbitrażu?
2. Niech $d=1.1\%$. Znajdź cenę arbitrażową opcji europejskiej o wypłacie $X=\left(\frac{S_0+S_1+S_2}{3}-85\right)^+$. Znajdź strategię replikującą.

Odp: 1. $d\in(0,1.2)$ 2. $p=0.5$, $\Pi_0(X)=8.38$.