Zad. 41. Udowodnij, że w modelu CRR cena wypłaty postaci $X = g(S_T)$, gdzie $g \in C^2$, $g(0) = 0$ jest równa

$$\Pi_0(X) = S_0 g^{'}(0) + \int_0^{\infty} C_0(y) g^{''}(y) dy,$$

gdzie $C_0(y)$ jest ceną arbitrażową w chwili 0 europejskiej opcji kupna akcji o cenie S z terminem wykonania T i z ceną wykonania y.

Wskazówka: Skorzystaj ze wzoru Taylora z resztą w postaci całkowej:

$$g(x) = g(0) + g^{'}(0)x + \int_0^{\infty} (x-y)^+ g^{''}(y) dy.$$

Opcje amerykańskie

Zad. 42. Tabela przedstawia ceny akcji po kolejnych okresach inwestycyjnych

ω_j	$t=0$	$t=1$	$t=2$
ω_1	$S_0 = 5$	$S_1 = 8$	$S_2 = 9$
ω_2	$S_0 = 5$	$S_1 = 8$	$S_2 = 6$
ω_3	$S_0 = 5$	$S_1 = 4$	$S_2 = 6$
ω_4	$S_0 = 5$	$S_1 = 4$	$S_2 = 3$

Niech $Z_t = (S_t - 5)^+$, $r = 0\%$. Wtedy $P^* = (1/6, 1/12, 1/4, 1/2)$.

1. Znajdź cenę arbitrażową amerykańskiej opcji kupna.
2. Znajdź optymalny moment wykonania opcji.

Zad. 43. Niech stopa procentowa bez ryzyka wynosi 10%, a ceny akcji są opisane przez proces S (patrz zad. 34):

ω_j	$t=0$	$t=1$	$t=2$
ω_1	$S_0 = 100$	$S_1 = 120$	$S_2 = 140$
ω_2	$S_0 = 100$	$S_1 = 120$	$S_2 = 100$
ω_3	$S_0 = 100$	$S_1 = 80$	$S_2 = 100$
ω_4	$S_0 = 100$	$S_1 = 80$	$S_2 = 60$

1. Znajdź cenę arbitrażową amerykańskich opcji kupna i sprzedaży z ceną wykonania $K = 105$.
2. Znajdź optymalny moment wykonania opcji.

Zad. 44. Mówimy, że opcja amerykańska $(Z_t)_{t\in\mathcal{T}}$ jest zawsze realizowalna, gdy dla dowolnego momentu stopu τ o wartościach mniejszych lub równych T istnieje strategia $\varphi \in \Phi$ taka, że $V_\tau(\varphi) = Z_\tau$. Udowodnij, że na rynku zupełnym każda opcja amerykańska jest zawsze realizowalna.

Wskazówka: Dla ustalonego τ rozpatrz wypłatę $X = \dfrac{Z_\tau}{B_\tau} B_T$.

Zad. 45. Niech w modelu CRR: $S_0 = 100$, $S_1^d = 80$, $S_1^u = 130$, $T = 3$, $r = 0.1$.

1. Znajdź cenę w chwili 0 opcji amerykańskiej o wypłacie $Z_t = \max\limits_{0\le j\le t} S_j$ (tzw. *opcja rosyjska*).
2. Znajdź optymalny moment wykonania opcji.

Zad. 46. Udowodnij Twierdzenie 33:

Niech U_t - wartość w chwili t opcji amerykańskiej zadanej przez $(Z_t)_{t\in\mathcal{T}}$,
C_t - wartość w chwili t opcji europejskiej o wypłacie $X = Z_T$.

Wtedy
1. $U_t \ge C_t$.
2. Gdy $C_t \ge Z_t$ dla każdego $t \le T$, to $U_t = C_t$ dla każdego $t \le T$.

Wskazówka do 1.: Skorzystaj z tego, że U_t jest P^*-nadmartyngałem i $U_T = Z_T = X = C_T$.
Wskazówka do 2.: Skorzystaj z tego, że

i. C_t^* jest P^*-martyngałem, a więc też P^*-nadmartyngałem; z założeń jest zatem P^*-nadmartyngałem dominującym $(Z_t)_{t\in\mathcal{T}}$.
ii. $U_t^* = \max(Z_t^*, \mathbb{E}[U_{t+1}|\mathcal{F}_t])$, a stąd $U_t^* \ge Z_t^*$ i U_t^* jest najmniejszym P^*-nadmartyngałem dominującym $(Z_t)_{t\in\mathcal{T}}$.

Zad. 47. Udowodnij Wniosek 34:
Ceny amerykańskiej i europejskiej opcji kupna z tym samym terminem wygaśnięcia i tą samą ceną wykonania są równe.

Wskazówka: Pokaż, że $C_t = B_t\,\mathbb{E}_{P^*}[C_T B_T^{-1}|\mathcal{F}_t] \ge S_t - K \ge Z_t$ i skorzystaj z Twierdzenia 33.