

Model Blacka-Scholesa

Zad. 48. Udowodnij, że proces $S_t = S_0 \exp(at + \sigma W_t)$, $a \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, spełnia

1. $\forall_{t \geq 0} S_t > 0$, S_0 - stała,
2. $\forall_{t, h \geq 0} \frac{S_{t+h}}{S_t}$ jest niezależne od $\sigma(S_u : u \leq t)$,
3. $\forall_{t, h \geq 0} \frac{S_{t+h}}{S_t} \sim \frac{S_h}{S_0}$,
4. S_t ma ciągle trajektorie.

Zad. 49. Pokaż, że proces

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right)$$

spełnia

$$\lim_{u \rightarrow t^-} \frac{1}{t-u} \mathbb{E}\left[\frac{S_t - S_u}{S_u}\right] = \mu, \quad \lim_{u \rightarrow t^-} \frac{1}{t-u} \text{Var}\left[\frac{S_t - S_u}{S_u}\right] = \sigma^2.$$

Wskazówka: Jeżeli $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Y = e^X$, to $\mathbb{E}[Y] = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$, $\text{Var}[Y] = e^{2\mu + \sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$.

Zad. 50. Pokaż, że średnia wartość ceny rośnie ze stopą równą μ , czyli $\mathbb{E}[S_t] = S_0 e^{t\mu}$. Stąd wynika, że gdy średnia stopa zwrotu z akcji ma być taka sama jak dla papierów bez ryzyka, to $\mu = r$.

Zad. 51. Pokaż, że

$$\mathbb{E}[\ln S_t] = \ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \quad \text{Var}[\ln S_t] = \sigma^2 t.$$

Zad. 52. Rozważmy akcję z ceną początkową 40, oczekiwanym zwrotem 16% p.a., współczynnikiem zmienności 20% p.a. Znajdź

1. 95% przedział ufności dla ceny akcji za trzy miesiące.
2. średnią cenę akcji za trzy miesiące.

Wskazówka: 95% przedział ufności dla zmiennej losowej o rozkładzie normalnym $N(m, \sigma^2)$ ma postać $(m - 2\sigma, m + 2\sigma)$.

Zad. 53. Pokaż, że jedynym rozwiązaniem

1. $dB_t = rB_t dt$, $B_0 = 1$ jest $B_t = e^{rt}$,
2. $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$ jest $S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right)$.

Zad. 54. Udowodnij, że strategia "kup i trzymaj aktywo" (*buy-and-hold*), czyli

$$\varphi_t^0 \equiv 0, \quad \varphi_t^1 \equiv a > 0$$

jest strategią samofinansującą się.

Zad. 55. Udowodnij, że strategia

$$\varphi_t^0 = \frac{S_t}{B_t}, \quad \varphi_t^1 \equiv 0$$

ma portfel bogactwa równy $V_t(\varphi) = S_t$ (taki sam jak strategia "kup i trzymaj"), ale nie jest strategią samofinansującą się.