Zad. 56. Czy na klasycznym rynku Blacka-Scholesa cena opcji kupna równa 40 i opcji sprzedaży równa 30 o terminie zapadalności 1 rok z ceną wykonania 38 przy obecnej cenie waloru 45 i stopie procentowej bez ryzyka 10% stwarzają możliwość arbitrażu?

Wskazówka: Sprawdź, czy zachodzi parytet kupna-sprzedaży.

Zad. 57. Zbadaj zachowanie ceny europejskiej opcji kupna, gdy $\sigma \to 0$.

Zad. 58. Udowodnij *Wniosek 43*, dający cenę europejskiej opcji sprzedaży.

Zad. 59. Udowodnij, że cena europejskiej opcji

1. kupna,
2. sprzedaży

jest funkcją wypukłą i spełnia warunek Lipschitza jako funkcja początkowej ceny akcji S_0.

Wskazówka (call-wypukłość): Pokaż, że druga pochodna jest dodatnia:

1. $S_0 N'(d_1(T, S_0)) - Ke^{-rT} N'(d_2(T, S_0)) = 0$.
2. $\dfrac{\partial C_0}{\partial S_0} = N(d_1(T, S_0))$.
3. $\dfrac{\partial^2 C_0}{\partial S_0^2} = N'(d_1(T, S_0)) \dfrac{1}{S_0 \sigma \sqrt{T}} > 0$.

Wskazówka (Lipschitz): Skorzystaj z Twierdzenia o wartości średniej.

Zad. 60. Udowodnij, że cena europejskiej opcji

1. kupna,
2. sprzedaży

jest funkcją wypukłą i spełnia warunek Lipschitza jako funkcja ceny wykonania K.

Zad. 61. Udowodnij, że wypłata europejskiej opcji kupna $f(x) = (S_T - x)^+$ jest funkcją wypukłą i spełnia warunek Lipschitza jako funkcja ceny wykonania K.

Wskazówka (wypukłość):

Funkcja mierzalna $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ spełniająca $\forall_{x,y \in (a,b)}\ f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) < \dfrac{f(x) + f(y)}{2}$ jest wypukła.

Pokaż, że

1. $\forall_{K>0} \forall_{\sigma>0}\ \ C_0(K) < \dfrac{C_0(K-\sigma) + C_0(K+\sigma)}{2}$.
2. W tym celu załóż przeciwnie: $\Pi_0 := C_0(K-\sigma) + C_0(K+\sigma) - 2C_0(K) \leq 0$.
3. Wykaż, że $\Pi_T = (S_T - (K-\sigma))^+ + (S_T - (K+\sigma))^+ - 2(S_T - K)^+ \geq 0$, co daje arbitraż, sprzeczność.