

Zad. 62. Udowodnij, że w modelu Blacka-Scholesa funkcja C zadająca proces ceny opcji kupna $C_t = C(t, S_t)$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego cząstkowego (*równania Blacka-Scholesa*)

$$\frac{\partial C}{\partial t}(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(t, x) + rx \frac{\partial C}{\partial x}(t, x) - rC(t, x) = 0, \quad x > 0, t \in (0, T)$$

z warunkiem końcowym $C(T, x) = (x - K)^+$ dla $x \geq 0$

i warunkiem brzegowym $C(t, 0) = 0$ dla $t \in [0, T]$, bo wypłata zerowa nic nie kosztuje.

Wskazówka:

1. Rozważmy portfel złożony z jednej opcji kupna *call* (długa pozycja) i α akcji (krótka pozycja). Wtedy portfel ma wartość $\Pi = C - \alpha S$. Oblicz $d\Pi$.
2. Przyjmij $\alpha = \frac{\partial C}{\partial S}(t, S)$, aby wyeliminować ryzyko z portfela.
3. Rynek Blacka-Scholesa jest bez arbitrażu. Zatem jeżeli portfel jest deterministyczny, to jego wartość musi rosnać w czasie zgodnie ze stopą procentową bez ryzyka r : $d\Pi = r\Pi dt$.

Zad. 63. Sprawdź, że cena europejskiej opcji kupna spełnia równanie Blacka-Scholesa.

Zad. 64. Pokaż, że podane funkcje spełniają równanie Blacka-Scholesa.

1. S
2. S^{-2r/σ^2}
3. $e^{(r+\sigma^2)(T-t)} S^2$

Zad. 65. Termin wygaśnięcia europejskiej opcji kupna upływa za sześć miesięcy. Bieżąca cena akcji wynosi 42, cena wykonania 40. Stopa wolna od ryzyka 10%, $\sigma = 20\%$. Oblicz cenę opcji kupna i wartość opcji sprzedaży z tą samą ceną wykonania.

Odp.: $C_0 = 4.76$, $P_0 = 0.81$

Zad. 66. Termin wygaśnięcia europejskiej opcji kupna upływa za trzy miesiące. Bieżąca cena akcji wynosi 80, cena wykonania 100. Stopa wolna od ryzyka 10%, $\sigma = 1.5$. Oblicz cenę opcji kupna i wartość opcji sprzedaży z tą samą ceną wykonania.

Odp.: $C_0 = 18.04$, $P_0 = 35.57$

Zad. 67. Udowodnij, że cena opcji kupna C w chwili $t = 0$ jest

1. rosnąca jako funkcja zmiennej S_0 - bieżącej ceny akcji.

Wskazówka: $C = \mathbb{E}_{P^*} [(S_0 e^Y - K e^{-rT})^+]$, gdzie $Y \sim \mathcal{N}\left(-\frac{\sigma^2 T}{2}, \sigma^2 T\right)$

2. malejąca jako funkcja zmiennej K - ceny wykonania.

Wskazówka: $C = \mathbb{E}_{P^*} [(S_0 e^Y - K e^{-rT})^+]$, gdzie $Y \sim \mathcal{N}\left(-\frac{\sigma^2 T}{2}, \sigma^2 T\right)$

3. rosnąca jako funkcja czasu pozostałego do realizacji opcji.

Wskazówka: $\frac{\partial C}{\partial T} = S_0 \frac{\sigma}{2\sqrt{T}} N'(d_1) + rK e^{-rT} N(d_2)$

4. rosnąca jako funkcja zmiennej σ - współczynnika zmienności.

Wskazówka: $\frac{\partial C}{\partial \sigma} = S_0 \frac{\sqrt{T}}{2} N'(d_1)$

5. rosnąca jako funkcja zmiennej r - stopy procentowej bez ryzyka.

Wskazówka: $\frac{\partial C}{\partial r} = T K e^{-rT} N(d_2)$