Teoria opcji

Instytut Matematyki
Uniwersytet Gdański

2018/19

Sprawy organizacyjne

Kontakt i strona

- E-mail: mwrzosek@mat.ug.edu.pl
- Konsultacje: środa, 12–14, p.323
- Materiały: `www.pe.ug.edu.pl`, `www.mat.ug.edu.pl/~mwrzosek`

Literatura

- J. Jakubowski, **Modelowanie rynków finansowych**, Script, 2006.
- J. Jakubowski, A. Palczewski, M. Rutkowski, Ł. Stettner, **Matematyka finansowa. Instrumenty pochodne**, WNT, 2003.
- S. R. Pliska, **Inroduction to Mathematical Finance, Discret Time Models**, Blackwell Publishers, 1997.
- J. Hull, **Kontrakty terminowe i opcje. Wprowadzenie**, WIG Press, Warszawa 1997.
- D. Lamberton, B. Lapeyre, **Introduction to Stochastic calculus applied to finance**, Chapman and Hall, 1996.
- M. Musiela, M. Rutkowski, **Martingale Methods in Financial Modelling**, Springer, 1997.
- A. Weron, R. Weron, **Inżynieria Finansowa**, WNT, 1999.

Forma zaliczenia

- Ćwiczenia: 2 kolokwia,
- Wykład: egzamin pisemny.

Sprawy organizacyjne

Szkic wykładu

- Model rynku finansowego z czasem dyskretnym.
  - portfel, wartość portfela, strategie samofinansujące,
  - arbitraż i miara martyngałowa,
  - wypłata europejska, strategie replikujące, rynek zupełny,
  - martyngałowa metoda wyceny instrumentów pochodnych,
  - model dwumianowy Coxa-Rossa-Rubinsteina.
- Model rynku finansowego z czasem ciągłym.
  - model Blacka-Scholesa, wycena martyngałowa instrumentów pochodnych,
  - wycena opcji europejskich w modelu Blacka-Scholesa.
- Współczynniki wrażliwości opcji.
- Opcje amerykańskie, egzotyczne.
- Metoda historyczna i metoda zmienności implikowanej wyznaczenia współczynnika zmienności σ (*volatility*).
- Przegląd modeli będących uogólnieniami modelu Blacka-Scholesa w szczególności modeli Hulla i White'a, Hestona, Dupire.

Wprowadzenie

Ogólny opis rynku

Rodzaje rynków finansowych

- Rynek kapitałowy (papiery wartościowe, akcje).
- Rynek pieniężny (kasowy) – instrumenty dłużne (lokaty/depozyty, bony, obligacje).
- Rynek instrumentów pochodnych.
- Rynek walutowy – transakcje wymiany walut.

Rynki możemy też podzielić na

- giełdę, miejsce gdzie dokonuje się obrót akcjami,
- rynek obligacji,
- rynek walutowy,
- giełdę towarową (miedź, srebro, zboże, ropa naftowa).

Rodzaje papierów wartościowych

- Aktywa pierwotne - aktywa, którymi bezpośrednio handluje się na rynku (instrumenty pierwotne, instrumenty bazowe, aktywa, papiery). Przykład: **akcje**.
- Aktywa pochodne - dowolne aktywa, których cena zależy od cen aktywów podstawowych (np. od ceny akcji, ceny obligacji rządowych, ceny obligacji hipotecznych, poziomu stóp procentowych, giełdowych kursów walut). Przykład: **opcje**, **kontrakty**.

Aktywa pierwotne: akcje

- To papiery wartościowe dające posiadaczowi prawo do dywidendy (wypłaty z zysku) i do części majątku firmy.
- Ich wartość odzwierciedla rynkowe oczekiwania inwestorów co do prawdopodobnych przyszłych dywidend i przyszłego wzrostu kapitału firmy.

Aktywa pochodne: opcje, kontrakty

- Opcje: dają one posiadaczowi opcji prawo do wykonania opcji (wykonanie nie jest obligatoryjne).
- Kontrakty: obie strony transakcji *muszą* wypełnić swoje zobowiązanie.

Opcje

Na przykład opcja kupna akcji ustalonej firmy daje prawo do kupna akcji tej firmy w ściśle określonym terminie (np. za 2 miesiące) i po ściśle określonej cenie.
- Gdy ceny akcji wzrosną ponad tę określoną cenę, posiadacz opcji kupna korzysta ze swoich praw i wykonuje opcję zyskując na różnicy.
- Gdy ceny spadną poniżej ustalonego poziomu, opcje stają się bezwartościowe - posiadacz opcji nie wykonuje opcji.

Kategorie inwestorów

- Arbitrażyści - inwestorzy, chcący osiągnąć natychmiastowy zysk (bez ryzyka zajścia niekorzystnego scenariusza mogącego zmienić ceny w przyszłości). Wychwytują i wykorzystują wszelkie różnice cen instrumentów na rynku, które dają możliwości zarobku.
- Inwestorzy, którzy chcą się zabezpieczyć przed niekorzystnymi zmianami cen na rynku.
- Inwestorzy, którzy wchodzą na rynek chcąc zarobić więcej niż inwestując w lokatę bankową.

Opcje

Opcje kupna (*call*)

Dają posiadaczowi prawo do kupienia określonego w umowie aktywa w ustalonej chwili lub przez ustalony okres czasu za ustaloną cenę.

Opcje sprzedaży (*put*)

Dają posiadaczowi prawo do sprzedaży określonego w umowie aktywa w ustalonej chwili (względnie przed ustalonym momentem) za ustaloną cenę.

Opcje mogą być wystawiane na

- akcje,
- indeksy akcji,
- towary,
- waluty obce,
- instrumenty dłużne (wierzycielskie),
- kontrakty terminowe,
- warunki pogodowe (opcje o charakterze zbliżonym do gry hazardowej),
- ...

Cena wykonania

- W kontrakcie kupna odnosi się ona do ceny, jaką płaci nabywca za aktywo, jeśli wykorzystuje swoje prawo do kupna.
- W kontrakcie sprzedaży jest to cena, za jaką właściciel opcji sprzedaje aktywo, jeśli wykorzystuje swoje prawo.
- Jest ustalana w chwili wystawienia opcji i nie podlega zmianie.
- *Wykonanie/rozliczenie* opcji - skorzystanie z prawa do zakupu lub sprzedaży opcji.

Termin wykonania

- Opcja jest ważna do momentu wygaśnięcia.
- Termin wykonania opcji jest dokładnie zdefiniowany w kontrakcie, np:
  - dla *opcji europejskich*: termin wykonania to termin wygaśnięcia,
  - dla *opcji amerykańskich*: termin wykonania może być dowolny aż do momentu wygaśnięcia.

Opcja jest umową, w której występują dwie strony:

- wystawiający opcję (*writer*),
- posiadacz opcji (*holder*).

Cena opcji/premia (*option price, option premium*)

- To cena rynkowa, zmieniająca się w czasie.
- Inwestowanie w opcje jest formą zabezpieczenia przed niekorzystnym ruchem cen (a więc jest pewną polisą ubezpieczeniową).
- Opcja kupna zabezpiecza jej posiadacza, który chce w przyszłości kupić dany instrument finansowy, przed skutkami wzrostu cen ponad ustalony poziom - cena wykonania jest maksymalną ceną po jakiej posiadacz opcji kupna kupi dany instrument finansowy.
- Opcja sprzedaży zabezpiecza jej posiadacza przed spadkiem cen aktywa bazowego poniżej pewnego poziomu (równemu cenie wykonania).

Opcje europejskie

- Opcja kupna (*call*)
  - Prawo do zakupu aktywa w chwili T za ustaloną z góry cenę K.
  - S_T - cena aktywa w chwili T.
    - ★ Jeśli $S_T > K$, to w chwili T posiadacz opcji realizuje ją i otrzymuje $S_T - K$.
    - ★ Jeśli $S_T \leq K$, to nic nie robi.
    - ★ W ten sposób otrzymujemy wypłatę (*payoff*):

$$g(S_T) = \begin{cases} S_T - K, & S_T > K, \\ 0, & S_T \leq K, \end{cases} = \max(S_T - K, 0) = (S_T - K)^+.$$

- Opcja sprzedaży (*put*)
  - Prawo do sprzedaży aktywa w chwili T po ustalonej z góry cenie K.
  - S_T - cena aktywa w chwili T.
    - ★ Jeśli $S_T < K$, to w chwili T posiadacz opcji realizuje ją i otrzymuje $K - S_T$.
    - ★ Jeśli $S_T \geq K$, to nic nie robi.
    - ★ Wypłata:

$$h(S_T) = \begin{cases} K - S_T, & S_T < K, \\ 0, & S_T \geq K, \end{cases} = \max(K - S_T, 0) = (K - S_T)^+.$$

- Wypłaty spełniają

$$g(S_T) - h(S_T) = (S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ = S_T - K.$$

- **Problem wyceny opcji**.
  Ile nabywca powinien zapłacić za opcję?
  Ile powinien kosztować w chwili $t = 0$ instrument dający losową wypłatę $(S_T - K)^+$ w chwili T?
- **Problem zabezpieczenia opcji** (*hedging*).
  Jak wystawca opcji może zabezpieczyć się przed losową stratą w chwili T, którą by poniósł nie podejmując żadnych działań po sprzedaży opcji?
  W jaki sposób wystawca opcji powinien wygenerować wielkość $(S_T - K)^+$ w chwili T, dysponując zapłatą za opcję?

Rynek doskonały (idealny)

- Oprocentowanie kredytów i depozytów bankowych jest jednakowe (założenie to dobrze opisuje sytuację dużych dealerów).
- Inwestorzy nie ponoszą żadnych kosztów (kosztów transakcji, kosztów prowizji, nie płacą podatków, itp.).
- Nie ma ograniczeń w dostępie do kredytów, wysokość kredytów udzielanych pojedynczemu inwestorowi jest nieograniczona.
- Wszystkie operacje są realizowane natychmiast.
- Rynek jest płynny, tj. możemy kupić lub sprzedać dowolną liczbę aktywów.
- Dostęp do informacji jest taki sam dla wszystkich inwestorów.
- Uczestnicy rynku są małymi inwestorami, ich samodzielne działanie na rynku nie zmienia cen.

Rynek jednookresowy dwustanowy

Model rynku jednookresowego dwustanowego

- Dwie chwile: 0, T.
- Dwa scenariusze wypadków: ω_1, ω_2, zwykle:
  - ω_1 - korzystny,
  - ω_2 - niekorzystny.

  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$, $P(\{\omega_1\}) = p > 0$, $P(\{\omega_2\}) = 1 - p > 0$.
- Dwa papiery wartościowe:
  - ryzykowny, np. akcje,
  - bezryzykowny, np. włożenie pieniędzy na rachunek bankowy.

  Ryzyko: niemożność przewidzenia ceny w przyszłości, zależy ona od zajścia konkretnego scenariusza.
- B_t - cena papieru bez ryzyka (za jedną jednostkę) w chwili t, $t \in \{0, T\}$, r - stopa procentowa, $r \geq 0$,

$$B_0 = 1, \quad B_T = 1 + r.$$

- S_t - cena papieru ryzykownego (za jedną jednostkę) w chwili t, $t \in \{0, T\}$,

$$S_0 = s > 0, \quad S_T(\omega) = \begin{cases} S^u, & \text{gdy } \omega = \omega_1, \\ S^d, & \text{gdy } \omega = \omega_2. \end{cases}$$

  Przyjmujemy $S^u > S^d$.

Problem wyceny. Portfel replikujący

Chcemy wycenić opcje w zgodzie z cenami aktywa bazowego danymi przez rynek, a więc szukamy ceny opcji w terminach cen rynkowych aktywa bazowego.
Opcję europejską będziemy utożsamiać z wypłatą X generowaną przez tę opcję. Wypłata zależy od scenariusza, wiec X jest zmienną losową.

Wypłata

Dowolną zmienną losową określoną na Ω nazwiemy wypłatą X w chwili T.
Mamy

$$X = f(S_T)$$

dla pewnego f.

Portfel replikujący

Portfelem nazwiemy parę liczb $\varphi = (\beta_0, \alpha_0)$, gdzie

- β_0 - wysokość wkładu bankowego (wielkość kredytu, gdy $\beta_0 < 0$) w chwili 0,
- α_0 - liczba posiadanych akcji w chwili 0.

Przykład:

$\varphi = (-2, 4)$ - inwestor pożyczył z banku 2 jednostki pieniężne i kupił 4 akcje.

Φ - zbiór wszystkich możliwych portfeli.

Przyjmując $(\beta, \alpha) \in \mathbb{R}^2$, otrzymujemy $\Phi = \mathbb{R}^2$.

$\alpha < 0$ oznacza, że rynek dopuszcza krótką sprzedaż.

Krótka sprzedaż (*short-selling*)

Polega na pożyczeniu i sprzedaży akcji w chwili 0 oraz odkupieniu tej samej liczby akcji i ich zwrocie w chwili T.
Mówimy, że inwestor zajął pozycję krótką w akcjach.

Gdy rynek nie dopuszcza krótkiej sprzedaży, ale dopuszcza możliwość wzięcia kredytu, to

$$\Phi = \{(\beta, \alpha) : \ \alpha \geq 0, \ \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Niech $\varphi = (\beta_0, \alpha_0)$ będzie portfelem inwestora.

Wartość (bogactwo) portfela

$$V_t(\varphi) = \begin{cases} \alpha_0 S_0 + \beta_0, & \text{gdy} \quad t = 0, \\ \alpha_0 S_T + \beta_0(1+r), & \text{gdy} \quad t = T. \end{cases}$$

Tak jest, gdyż skład portfela ustaliliśmy w chwili początkowej ($t = 0$) i nie ulega on zmianie do chwili końcowej równej T.

Inwestor sprzedający wypłatę X musi umieć ją zabezpieczyć, co oznacza, że wartość portfela (który sprzedający wypłatę zbudował za otrzymane ze sprzedaży pieniądze) musi być w chwili T równa X.

Portfel replikujący

Mówimy, ze portfel φ replikuje wypłatę X, gdy wartość końcowa portfela jest równa X, czyli

$$V_T(\varphi)(\omega_i) = X(\omega_i), \quad \text{dla } i = 1, 2.$$

Portfel replikujący jest doskonałym zabezpieczeniem wypłaty X, gdyż eliminuje całkowicie ryzyko związane z niepewnością, który scenariusz się zrealizuje.

Twierdzenie 1

Dla każdej wypłaty istnieje dokładnie jeden portfel replikujący. Dla wypłaty X ma on postać

$$\alpha_0 = \frac{X^u - X^d}{S^u - S^d} \qquad \beta_0 = \frac{X^d S^u - X^u S^d}{(1+r)(S^u - S^d)},$$

gdzie $X^u = X(\omega_1)$, $X^d = X(\omega_2)$

Dowód.

Cena racjonalna (godziwa) wypłaty X

Racjonalną ceną w chwili 0 wypłaty X nazywamy liczbę

$$\Pi_0(X) := V_0(\varphi),$$

gdzie φ jest portfelem replikującym wypłatę X.

Jest to więc początkowa inwestycja potrzebna do konstrukcji portfela replikującego.
Z definicji wynika, ze racjonalna cena wypłaty nie zależy od subiektywnych ocen prawdopodobieństw zmian cen akcji, nie zależy więc od prawdopodobieństwa P.

Arbitraż

Rynek $\mathcal{M}$ jest trójką $\mathcal{M} = (B, S, \Phi)$, gdzie

- B - wartość jednostki rachunku bankowego,
- S - cena instrumentu ryzykownego,
- Φ - zbiór możliwych portfeli.

Na tym rynku potrafimy wycenić każdą wypłatę (czyli każdy instrument pochodny). Jednak powyższy model rynku trzeba jeszcze poprawić. Dopuszcza on sytuację, że dla dodatniej wypłaty $X > 0$ może się okazać, że jej cena jest ujemna, czyli $\Pi_0(X) < 0$.

Arbitraż

Mówimy, że w modelu $\mathcal{M}$ nie ma możliwości arbitrażu (model nie dopuszcza możliwości arbitrażu), gdy nie istnieje portfel $\varphi \in \Phi$, taki że

$$V_0(\varphi) = 0, \quad V_T(\varphi) \geq 0, \quad \exists_{\omega \in \Omega} \; V_T(\varphi)(\omega) > 0.$$

Portfel φ dla którego warunki te są spełnione nazywamy *możliwością arbitrażu*.

Interpretacja portfela arbitrażowego: nie mając nic na początku, stosując strategię φ, na końcu operacji nic nie stracimy i mamy dodatni zysk dla pewnych scenariuszy.

Istnienie możliwości arbitrażu świadczy o serii poważnych błędów w wycenie instrumentów na rynku. Takie błędy są bardzo szybko wychwytywane przez arbitrażystów, skutkiem czego rynek szybko wraca do równowagi. Zatem model rynku powinien być modelem bez możliwości arbitrażu.

Twierdzenie 2

Rynek jest wolny od arbitrażu wtedy i tylko wtedy, gdy

$$S^d < (1+r)S_0 < S^u. \tag{1}$$

Dowód.

Wykluczenie równości w (1) ma sens ekonomiczny: wykluczamy wtedy sytuację, w której na rynku są dwa aktywa, ale jednym z nich nikt nie handluje. Gdy

- $S^d = (1+r)S_0$, to zawsze należy inwestować w akcje, bo w najgorszym przypadku dadzą tyle, co depozyt w banku;
- $S^u = (1+r)S_0$, to zawsze należy wkładać pieniądze do banku, bo depozyt da większy zysk niż akcje i to bez żadnego ryzyka.

W obu tych przypadkach rynek nie jest płynny i znika z niego jeden z rodzajów aktywów.

Na rynku bez możliwości arbitrażu cena wypłaty (instrumentu pochodnego X) jest dobrze określona. Wynika to z następującego twierdzenia.

Twierdzenie 3

Cena w chwili $t = 0$ wypłaty X inna niż $V_0(\varphi)$, gdzie φ jest portfelem replikującym wypłatę X, prowadzi do arbitrażu.

Cena arbitrażowa

Niech $\mathcal{M}$ będzie rynkiem bez możliwości arbitrażu. Wtedy cenę racjonalną instrumentu pochodnego X nazywamy ceną arbitrażową X w chwili $t = 0$ na rynku $\mathcal{M}$ i oznaczamy $\Pi_0(X)$.

Wycena za pomocą miary martyngałowej

Sposób wyliczania ceny instrumentów pochodnych na rynku bez możliwości arbitrażu, oparty na obliczaniu wartości oczekiwanej względem pewnej wyróżnionej miary probabilistycznej.

Przykład. Przyjmujemy $S_0 = 260$, $S^d = 220$, $S^u = 340$, $K = 280$, $r = 0$. Wtedy

$$X(\omega) = (S_T - K)^+(\omega) = \begin{cases} X^u = 60, & \text{gdy } \omega = \omega_1, \\ X^d = 0, & \text{gdy } \omega = \omega_2, \end{cases}$$

Obliczamy portfel replikujący

$$\varphi = (\beta, \alpha) = (-110, \frac{1}{2}),$$

a stąd $C_0 = 20$. Zatem $C_0 \in [0, 60]$, a więc istnieje jedno $q \in (0, 1)$ takie, że

$$C_0 = qX(\omega_1) + (1 - q)X(\omega_2),$$

czyli

$$C_0 = \mathbb{E}_Q[X], \quad \text{gdzie} \quad Q(\{\omega_1\}) = q = 1/3, \quad Q(\{\omega_2\}) = 1 - q.$$

Okazuje się, że dla tego rozkładu prawdopodobieństwa Q zachodzi także

$$\mathbb{E}_Q[S_T] = \frac{1}{3} \cdot 340 + \frac{2}{3} \cdot 220 = 260 = S_0.$$

Pytania:

- Czy jest to przypadek wynikający ze szczególnego doboru danych?
- Czy cena jest wartością oczekiwaną wypłaty względem pewnego rozkładu?

W tym przykładzie

- q nie zależy od prawdopodobieństwa subiektywnego P,
- potencjalnie zależy od wypłaty $X = f(S_T)$,
- jednocześnie dla cen akcji zachodzi $S_0 = \mathbb{E}_Q[S_T]$.

Chciałoby się, aby w sytuacji ogólnej q (a więc rozkład Q) zależało tylko od cen S_T, a nie zależało od postaci funkcji f.

Okazuje się, ze taki rozkład można zawsze znaleźć.

Z Twierdzenia 2: rynek bez możliwości arbitrażu spełnia

$$S^d < (1+r)S_0 < S^u \quad \text{lub równoważnie} \quad d < 1+r < u.$$

Zatem $1+r \in (d,u)$, a stąd $1+r$ jest kombinacją wypukłą końców odcinka, czyli istnieje $\lambda \in (0,1)$, takie że

$$1+r = \lambda u + (1-\lambda)d. \tag{2}$$

Liczby λ i $1-\lambda$ zadają nowe prawdopodobieństwo Q, takie że

$$Q(Z=u) = \lambda, \quad Q(Z=d) = 1-\lambda,$$

gdzie $S_T = S_0 Z = sZ$, $Z-1$ wskazuje, o ile zmieniła się cena początkowa

$$Z(\omega) = \begin{cases} u, & \text{gdy } \omega = \omega_1, \\ d, & \text{gdy } \omega = \omega_2, \end{cases}$$

Korzystając z (2), otrzymujemy

$$\mathbb{E}_Q[S_T] = su\lambda + sd(1-\lambda) = s(u\lambda + d(1-\lambda)) = s(1+r).$$

Zatem zachodzi

$$S_0 = \frac{1}{1+r}\,\mathbb{E}_Q[S_T],$$

czyli otrzymaliśmy wzór przedstawiający cenę dzisiejszą jako zdyskontowaną wartość oczekiwaną ceny jutrzejszej względem prawdopodobieństwa Q.

Dyskontowanie

Zwykle ważne są nie wielkości cen, a proporcje pomiędzy nimi. Interesuje nas stosunek cen rożnych aktywów. W tym celu wyrażamy wszystko w terminach wartości jakiegoś ustalonego aktywa.

Najczęściej cenę jednostki w banku B (inwestycja bez ryzyka) uznajemy za jednostkę ceny na rynku i wszystkie inne ceny wyrażamy w tych jednostkach (czyli dyskontem jest rachunek bankowy).

Wtedy jednostka na rachunku bankowym ma stałą wartość:

jeśli B^* jest zdyskontowanym procesem wartości jednostki w banku: $B_t^* = \frac{B_t}{B_t}$, to

$$B_0^* = B_T^* = 1.$$

Zamiast procesu cen rozważamy zdyskontowany proces cen $S_t^* = \frac{S_t}{B_t}$:

$$S_0^* = S_0, \quad S_T^* = \frac{S_T}{1+r}.$$

Jest to konwencja techniczna, ułatwiająca obliczenia.

Miara martyngałowa

Przypomnijmy

$$S_0 = \frac{1}{1+r}\,\mathbb{E}_Q[S_T], \quad \text{a zatem} \quad S_0^* = \mathbb{E}_Q[S_T^*].$$

Dla rynku jednookresowego dwustanowego jest to równoważne faktowi, że S^* jest Q-martyngałem z czasem $\{0, T\}$ względem filtracji $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$, gdyż

$$\mathbb{E}_Q[S_T^* | \mathcal{F}_0] = \mathbb{E}_Q[S_T^*] = S_0^*.$$

Miara martyngałowa

Miarę probabilistyczną P^* nazywamy miarą martyngałową dla zdyskontowanego procesu cen S^*, gdy

- miara P^* jest równoważna z P,
- S^* jest P^*-martyngałem (tzn. $\mathbb{E}_{P^*}[S_T^*] = S_0$)

Równoważność miar

Miara P^* jest równoważna z P, gdy obie mają te same zbiory miary zero.

Z założenia $P(\{\omega_i\}) \in (0,1)$ dla $i = 1, 2$, więc miara P^* równoważna z P spełnia ten sam warunek: $P^*(\{\omega_i\}) \in (0,1)$ dla $i = 1, 2$.

Lemat 4

Na rynku $\mathcal{M}$ istnieje miara martyngałowa P^* dla zdyskontowanego procesu cen S^* wtedy i tylko wtedy, gdy jedyne rozwiązanie równania

$$S_0(1+r) = \lambda S^u + (1-\lambda)S^d \tag{3}$$

względem λ należy do przedziału $(0,1)$.

Dowód.

Uwaga: Jedyne rozwiązanie równania (3) jest postaci $\lambda = \dfrac{(1+r)S_0 - S^d}{S^u - S^d}$, więc miara martyngałowa P^* jest zadana przez ceny i stopę procentową.

Twierdzenie 5

Rynek $\mathcal{M} = (B, S, \Phi)$ jest wolny od arbitrażu wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje miara martyngałowa dla zdyskontowanego procesu cen S^*. Wtedy cena arbitrażowa w chwili 0 dowolnej wypłaty X w chwili T jest dana wzorem

$$\Pi_0(X) = \mathbb{E}_{P^*}\left[\frac{X}{1+r}\right], \qquad P^* - \textit{miara martyngałowa.} \tag{4}$$

Dowód.

Uwaga:

1. Cena arbitrażowa wyliczona według wzoru (4) nie zależy od preferencji, czyli wyboru prawdopodobieństwa P dla modelu ewolucji cen instrumentu bazowego (dlatego nazywana jest *miarą niezależną od preferencji*). Zależy tylko od nośnika miary P - jest taka sama dla wszystkich miar równoważnych. Oznacza to, ze inwestorzy zgadzają się co do wielkości przyszłych cen instrumentu bazowego, choć różnią się oceną prawdopodobieństwa wystąpienia konkretnych cen. Zatem rolą P jest określenie, jakie zdarzenia są możliwe, a jakie nie są możliwe. P wyznacza nam klasę miar równoważnych.
2. Czynnikiem dyskontującym jest proces B, ale można też wybrać proces cen S.
3. Wzór (4) uzasadnia nazywanie miary martyngałowej P^* *miarą wyceniającą*. Z (4) wynika, że dzisiejsza cena arbitrażowa (tzn. dla $t = 0$) wypłaty X jest równa wartości średniej, przy mierze wyceniającej, zdyskontowanej wypłaty (a więc wypłaty liczonej przy dzisiejszej wartości pieniądza).

Parytet dla cen opcji. Monotoniczność ceny

Parytet (formuła zgodności) kupna-sprzedaży

$$C_0 - P_0 = S_0 - \frac{K}{1+r}.$$

Dowód.

Twierdzenie 6

Gdy rynek jest wolny od arbitrażu oraz wypłaty X i Y spełniają $X \geq Y$, to

$$\Pi_0(X) \geq \Pi_0(Y).$$

Dowód.

Wniosek 7

Niech na rynku bez możliwości arbitrażu $C_0(K)$ (odpowiednio $P_0(K)$) oznacza cenę opcji kupna (sprzedaży) z ceną wykonania K. Wtedy

1. $K_1 \leq K_2 \;\Rightarrow\; C_0(K_1) \geq C_0(K_2)$,
2. $K_1 \leq K_2 \;\Rightarrow\; P_0(K_1) \leq P_0(K_2)$.

Dowód.

Rynki skończone

Rynki skończone

Chwile czasu:
$0, 1, 2, \ldots, T, \quad T < \infty, \quad \mathcal{T} := \{0, \ldots, T\}$

Scenariusze:
$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_d\}, \ \mathcal{F} = 2^\Omega, \ P(\{\omega_i\}) > 0, \ i = 1, \ldots, d.$

σ**-ciała:**

- $\mathcal{F}_t$, $t \in \mathcal{T}$ - zasób wiedzy o rynku zebrany do chwili t, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ dla $s \leq t$,
- Ciąg $(\mathcal{F}_t, \ t \in \mathcal{T})$ jest filtrcją; $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}, \ \mathcal{F}_T = \mathcal{F}$.

Instrumenty pierwotne:

- na rynku jest ich $k + 1$,
- ich ceny za jednostkę w chwili t opisują zmienne losowe $S_t^0, S_t^1, \ldots, S_t^k$,
- ceny są $\mathcal{F}_t$-mierzalne: nasza dzisiejsza wiedza nie pozwala nam przewidzieć przyszłych cen; w chwili t znamy jedynie ceny S_u^i dla $u \leq t$,
- $S_t = (S_t^0, S_t^1, \ldots, S_t^k)^\mathsf{T}$ - ciąg adaptowanych zmiennych losowych,
- $S_0 \in \mathbb{R}^{k+1}$ - wektor cen początkowych,
- S^0 - cena aktywa bezryzykownego, $S_0^0 = 1, \ r \geq 0, \ S_t^0 = (1 + r)^t$,
- $\beta_t = 1/S_t^0$ - czynnik dyskontujący.

Strategia finansowa (portfel, proces portfelowy)

To dowolny proces prognozowalny $(\varphi)_{t \in \mathcal{T}}$ o wartościach w $\mathbb{R}^{k+1}$:

$$\varphi_t = (\varphi_t^0, \varphi_t^1, \ldots, \varphi_t^k)^{\mathsf{T}},$$

- φ_0^i jest $\mathcal{F}_0$-mierzalna,
- φ_t^i jest $\mathcal{F}_{t-1}$-mierzalna, $t = 1, 2, \ldots, T$,
- zmienna losowa φ_t^i jest liczbą jednostek i-tego waloru trzymanych w portfelu od chwili $t-1$ do chwili t

Prognozowalność:

- portfel na chwilę t (czyli wektor φ_t) jest konstruowany na podstawie wiedzy osiągalnej do chwili $t-1$ (tj. wiedzy sprzed momentu t),
- nie zmienia się do chwili t, w której inwestor poznaje nowe ceny;
- Wtedy inwestor konstruuje nowy skład portfela na następną chwilę $t+1$, czyli φ_{t+1}.

Wartość portfela (proces wartości, bogactwo)

Wartość portfela φ w chwili t to zmienna losowa

$$V_t(\varphi) = \sum_{i=0}^{k} \varphi_t^i S_t^i.$$

- $V_t(\varphi)$ jest iloczynem skalarnym wektorów φ i S_t, więc $V_t(\varphi) = \varphi_t S_t$.
- Kapitał początkowy (wielkość początkowa inwestycji): $V_0(\varphi) = \varphi_0 S_0$.

Gdy inwestor w chwili t konstruuje portfel φ_{t+1} na chwilę $t+1$, to

- koszt konstrukcji tego portfela wynosi $\varphi_{t+1} S_t$,
- wartość portfela w chwili $t+1$, na którą był konstruowany wynosi $\varphi_{t+1} S_{t+1}$.

Stąd $\varphi_{t+1} S_{t+1} - \varphi_{t+1} S_t$ jest zyskiem w chwili $t+1$ wynikającym ze zmiany cen.

Proces zysku portfela

Proces zysku $G(\varphi)$ portfela φ definiowany jest wzorem

$$G_t(\varphi) = \sum_{u=1}^{t-1} \varphi_{u+1}(S_{u+1} - S_u), \quad t = 1, \ldots, T.$$

Strategia samofinansująca się

Strategię φ nazywamy samofinansującą się, gdy

$$\varphi_t S_t = \varphi_{t+1} S_t, \qquad t = 0, 1, \ldots, T-1.$$

- Ta własność strategii oznacza, że inwestor zmienia swoją pozycję (portfel) z φ_t na φ_{t+1} bez konsumpcji lub dopływu kapitału z zewnątrz.
- W chwili t inwestor dysponuje kapitałem $V_t(\varphi)$, który w całości przeznacza na zakup portfela φ_{t+1}, płacąc ceny S_t za aktywa.

Oznaczamy: Φ - klasa strategii samofinansujących się.

Charakteryzacja portfeli samofinansujących się:

- w chwili t kapitał takiego portfela jest równy sumie kapitału początkowego i wartości procesu zysku tego portfela w tej chwili.

Zysk w chwili t jest sumą zysków w poprzednich chwilach wynikających tylko ze zmiany cen z S_u w chwili u na S_{u+1} w chwili $u+1$, gdzie $u = 0, \ldots, T-1$.

Twierdzenie 8

Portfel φ jest samofinansujący się wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich t spełniona jest równość

$$V_t(\varphi) = V_0(\varphi) + G_t(\varphi).$$

Dowód.

Z powyższego twierdzenia wynika, ze bogactwo portfela dla strategii samofinansującej się zależy tylko od portfela i zmian cen.

Uwaga: Z dowodu powyższego twierdzenia wynika, że portfel φ jest samofinansujący się wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich t zachodzi

$$\varphi \in \Phi \iff V_{t+1}(\varphi) - V_t(\varphi) = \varphi_{t+1}(S_{t+1} - S_t).$$

Okazuje się, że gdy inwestor postępuje zgodnie ze strategią samofinansującą, to wartość portfela jest całkowicie zdeterminowana przez bogactwo początkowe i strategię postępowania z aktywami ryzykownymi.

Twierdzenie 9

Dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ *i dowolnego procesu prognozowalnego*

$$\varphi_t = (\varphi_t^1, \ldots, \varphi_t^k)^{\mathsf{T}}, \; t \in \{0, 1 \ldots, T\}$$

istnieje jednoznacznie wyznaczony proces prognozowalny

$$\varphi_t^0, \; t \in \{0, 1 \ldots, T\}$$

taki, że strategia

$$\varphi = (\varphi^0, \varphi^1, \ldots, \varphi^k)^{\mathsf{T}}$$

jest samofinansująca się i jej początkowe bogactwo jest równe x.

Dowód.

Arbitraż

Arbitraż (strategia arbitrażowa)

Strategię φ nazywamy arbitrażem, gdy

$$V_0(\varphi) = 0, \qquad P(V_T(\varphi) \geq 0) = 1, \qquad P(V_T(\varphi) > 0) > 0.$$

Uwaga: Ponieważ $P(\{\omega_i\}) > 0$ dla każdego i, więc równoważnie

$$\forall_{\omega\in\Omega}\ V_0(\varphi)(\omega) = 0, \quad \forall_{\omega\in\Omega}\ V_T(\varphi)(\omega) \geq 0), \quad \exists_{\omega\in\Omega}\ V_T(\varphi)(\omega) > 0.$$

Uwaga: Warunek braku arbitrażu na rynku:

$$\forall_{\varphi\in\Phi}\ \left((V_0(\varphi) = 0, \quad V_T(\varphi) \geq 0 \ \ P - \text{p.n.}) \quad \Rightarrow \quad V_T(\varphi) = 0\right).$$

Modelem rynku finansowego nazwiemy parę $\mathcal{M} = (S, \Phi)$.
Rynek nazywamy rynkiem bez możliwości arbitrażu, gdy nie istnieje strategia arbitrażowa w klasie strategii samofinansujących się.

Twierdzenie 10

Jeżeli na rynku $\mathcal{M} = (S, \Phi)$ *nie ma możliwości arbitrażu, to dla każdego* $t \in \{0, \ldots, T-1\}$, $A \in \mathcal{F}_t$ *i* $\varphi \in \Phi$ *mamy*

1. $P(V^*_{t+1}(\varphi) - V^*_t(\varphi) \geq 0 | A) = 1 \quad \Rightarrow \quad P(V^*_{t+1}(\varphi) - V^*_t(\varphi) = 0 | A) = 1.$
2. $P(V^*_{t+1}(\varphi) - V^*_t(\varphi) \leq 0 | A) = 1 \quad \Rightarrow \quad P(V^*_{t+1}(\varphi) - V^*_t(\varphi) = 0 | A) = 1.$

Dowód.

Uwaga: Jeśli na rynku nie istnieje arbitraż globalny, to nie istnieje arbitraż lokalny, czyli arbitraż w jednym okresie.

Uwaga: Aby móc porównywać wartość portfela w rożnych chwilach czasu musimy uwzględniać oprocentowanie, więc porównujemy zdyskontowane wartości portfela.

Wypłata europejska i jej wycena

Wypłata europejska

Wypłata europejska X w chwili T to dowolna $\mathcal{F}_T$–mierzalna zmienna losowa.

Definicja oznacza, że wypłata europejska zależy od wiedzy zebranej na rynku.

Strategia replikująca

Strategię $\varphi \in \Phi$ nazywamy strategią replikującą wypłatę X, gdy $V_T(\varphi) = X$.

Wypłata osiągalna

Wypłatę X nazywamy osiągalną, gdy istnieje strategia ją replikująca.

Wypłaty osiągalne tworzą podprzestrzeń liniową w zbiorze wypłat.

Wypłata jednoznacznie replikowalna

Wypłata X jest jednoznacznie replikowalna w modelu $\mathcal{M}$, gdy dla dowolnych φ, ψ replikujących X mamy $V_t(\varphi) = V_t(\phi)$ dla wszystkich t.

Wtedy $V_t(\varphi)$ nazywamy procesem replikującym X lub procesem bogactwa w $\mathcal{M}$.

Na rynku jednookresowym dwustanowym wszystkie wypłaty są osiągalne, istnieje dokładnie jedna strategia replikująca, więc wypłaty osiągalne są jednoznacznie replikowalne.

Na rynku skończonym

- nie wszystkie wypłaty są osiągalne,
- wypłaty osiągalne są jednoznacznie replikowalne, ale nie oznacza to, że istnieje dokładnie jedna strategia replikująca.

Twierdzenie 11

Jeśli $\mathcal{M}$ jest rynkiem bez możliwości arbitrażu, to każda wypłata X osiągalna w $\mathcal{M}$ jest jednoznacznie replikowalna w $\mathcal{M}$.

Dowód.

Cena arbitrażowa

Niech $\mathcal{M}$ będzie rynkiem bez możliwości arbitrażu. Wtedy proces replikujący wypłaty osiągalnej X nazywamy arbitrażową ceną X na rynku $\mathcal{M}$ i oznaczamy przez $\Pi_t(X)$, $t \in \mathcal{T}$.

Uwaga: Z Twierdzenia 11 wynika, że cena arbitrażowa $\Pi_t(X)$ wypłaty osiągalnej X istnieje zawsze i jest wyznaczona jednoznacznie.

Miara martyngałowa dla rynku skończonego

Wyznaczenie ceny arbitrażowej osiągalnej wypłaty X poprzez znalezienie strategii replikującej jest często bardzo trudne, szczególnie gdy mamy długi horyzont czasowy T i dużo scenariuszy.

Metoda martyngałowa pozwala na wypisanie jawnych wzorów na $\Pi_t(X)$ za pomocą wartości oczekiwanych.

Proces dyskontujący, czynnik dyskontujący, *numéraire*

Wyróżniony instrument pierwotny o numerze 0, którego zadaniem jest mierzenie wartości pieniądza w czasie. Przyjmiemy, że S_0 odpowiada lokacie pieniędzy w banku na znany procent r tzn. $S_0 = B$.

Oznaczenia rynku:
$\mathcal{M} = ((B, S^1, \ldots, S^k), \Phi)$, $\mathcal{M} = ((S^0, S^1, \ldots, S^k), \Phi)$, $\mathcal{M} = (S, \Phi)$.

Zdyskontowany proces cen

Wektor $S^* = (1, S^{*1}, \ldots, S^{*k})^{\mathrm{T}}$, gdzie $S_t^{*i} = \dfrac{S_t^i}{B_t}$, $i = 1, \ldots, k$.

Lemat 12

Strategia φ jest samofinansująca się wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $t \leq T$ zachodzi

$$V_t^*(\varphi) = V_0^*(\varphi) + \sum_{j=0}^{t-1} \varphi_{j+1}(S_{j+1}^* - S_j^*).$$

Dowód.

Wniosek 13

Strategia φ jest samofinansująca się wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $t \leq T$ zachodzi

$$V_{t+1}^*(\varphi) - V_t^*(\varphi) = \varphi_{t+1}(S_{t+1}^* - S_t^*).$$

Wniosek 14

Zmiana czynnika dyskontującego nie zmienia klasy portfeli samofinansujących się.

Miara martyngałowa

Miara martyngałowa

Miarę probabilistyczną P^* na $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ równoważną z P nazywamy miarą martyngałową dla

- zdyskontowanego procesu cen S^*, gdy S^* jest P^*-martyngałem względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_t$,
- rynku $\mathcal{M} = (S, \Phi)$, gdy dla każdej strategii $\varphi \in \Phi$ proces $V^*(\varphi)$ zadany wzorem
$$V_t^*(\varphi) = \frac{V_t(\varphi)}{B_t}$$
jest P^*-martyngałem względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_t$.

Oznaczenie:

$\mathcal{P}(S^*)$ - klasa miar martyngałowych dla procesu S^*,
$\mathcal{P}(\mathcal{M})$ - klasa miar martyngałowych dla rynku $\mathcal{M}$.

$\mathcal{P}(S^*)$ - klasa miar martyngałowych dla procesu S^*,
$\mathcal{P}(\mathcal{M})$ - klasa miar martyngałowych dla rynku $\mathcal{M}$.

Uwaga: Klasy $\mathcal{P}(S^*)$, $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ zależą od czynnika dyskontującego.

Uwaga: Dla przestrzeni probabilistycznej Ω o skończonej liczbie elementów miara probabilistyczna Q jest równoważna z P wtedy i tylko wtedy, gdy $Q(\omega) > 0$ dla kazdego ω.

Wprost z definicji miary martyngałowej dla rynku mamy

Wniosek 15

Jeśli $P^* \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, to dla dowolnego portfela $\varphi \in \Phi$ i dowolnej chwili t

$$V_t(\varphi) = B_t\, \mathbb{E}_{P^*}[V_T(\varphi)B_T^{-1} | \mathcal{F}_t].$$

Twierdzenie 16

Miara P^* jest miarą martyngałową dla rynku M wtedy i tylko wtedy, gdy P^* jest miarą martyngałową dla zdyskontowanego procesu cen.

Dowód.

- Mamy zatem $\mathcal{P}(S^*) = \mathcal{P}(\mathcal{M})$.
- Twierdzenie to pozwala sprowadzić badanie czy P^* jest miarą martyngałową dla rynku (czy dla wszystkich $\varphi \in \Phi$ procesy $V^*(\varphi)$ są P^*-martyngałami), do badania czy proces zdyskontowanych cen (a więc jeden proces) jest P^*–martyngałem.

Twierdzenie 17

(Pierwsze podstawowe twierdzenie matematyki finansowej)

Rynek M jest rynkiem bez możliwości arbitrażu wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje miara martyngałowa.

Dowód.

Wycena

Twierdzenie 18

Niech $\mathcal{M}$ będzie rynkiem bez możliwości arbitrażu. Wtedy cena arbitrażowa w chwili t osiągalnej na rynku $\mathcal{M}$ wypłaty X jest dana wzorem

$$\Pi_t(X) = B_t \, \mathbb{E}_{P^*}\left[\frac{X}{B_T}\middle|\mathcal{F}_t\right] \tag{5}$$

dla dowolnej miary martyngałowej P^*.

Dowód.

Uwaga: Na rynku bez możliwości arbitrażu cena arbitrażowa jest operatorem liniowym na przestrzeni liniowej wypłat osiągalnych, czyli gdy X i Y są wypłatami osiągalnymi, to

$$\Pi_t(X+Y) = \Pi_t(X) + \Pi_t(Y).$$

Wycena

Wniosek 19

(Parytet kupna-sprzedaży)

Na rynku bez możliwości arbitrażu, gdy europejskie opcje kupna i sprzedaży (dla tej samej akcji) z tą samą ceną wykonania K są osiągalne, to ich ceny są związane wzorem:

$$C_0(K) - P_0(K) = S_0 - \frac{K}{B_T},$$

gdzie $C_0(K)$ - cena w chwili 0 europejskiej opcji kupna z ceną wykonania K, $P_0(K)$ - cena w chwili 0 europejskiej opcji sprzedaży z ceną wykonania K.

Wniosek 20

Na rynku bez możliwości arbitrażu wycena wypłaty osiągalnej za pomocą ceny arbitrażowej (5) tworzy zgodny system cen, w tym sensie, że rynek rozszerzony o instrument bazowy o cenie $S^{k+1} = \Pi(X)$ jest dalej rynkiem bez możliwości arbitrażu.

Zupełność rynku

Rynek zupełny

Rynek $\mathcal{M}$ nazywamy zupełnym, gdy każda wypłata jest osiągalna na tym rynku.

Twierdzenie 21

(Drugie podstawowe twierdzenie matematyki finansowej)

Rynek bez możliwości arbitrażu jest zupełny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje dokładnie jedna miara martyngałowa.

Dowód.

Zupełność jest bardzo ważną cechą rynku, gdyż na takim rynku potrafimy wycenić w sposób jednoznaczny każdą wypłatę.

Twierdzenie 22

Gdy rynek jest wolny od arbitrażu, to wypłata X jest osiągalna wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $f : \mathcal{P}(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}$ zadana wzorem

$$f(P) = \mathbb{E}_P \left[X B_T^{-1} \right]$$

jest stała.

Model dwumianowy (Coxa-Rossa-Rubinsteina)

- Model CRR powstał później niż model Blacka-Scholesa.
- Ma zastosowanie przy konstrukcji metod numerycznych dla obliczania cen różnych skomplikowanych wypłat.

Model CRR

- Rachunek bankowy z procesem cen: $B_t = (1+r)^t, \quad t = 0, \ldots, T$
- Instrument ryzykowny (np. akcja) z procesem cen:
  $S_0 > 0, \quad S_{t+1} = S_t U_{t+1}, \quad t = 0, \ldots, T-1,$
  U_t - niezależne zmienne losowe o jednakowym rozkładzie
  $P(U_t = 1+b) = p, \quad P(U_t = 1+a) = 1-p, \quad p \in (0,1), \ -1 < a < b$
- Wielkości a i b są stopami zwrotu z akcji, gdy cena zmienia się odpowiednio na $S_t(1+a)$ i $S_t(1+b)$, bo
$$\frac{S_{t+1} - S_t}{S_t} = U_{t+1} - 1.$$

Model CRR można zrealizować na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$:

$\Omega = \{1+a, 1+b\}, \ \mathcal{F} = 2^\Omega, \ P -$ prawd. produktowe wyzn. jednozn. przez p.

- $U_t((\omega_1, \ldots, \omega_T)) = \omega_t$
- $\mathcal{F}_t = \sigma(S_0, S_1, \ldots, S_t) = \sigma(U_1, \ldots, U_t)$
- $P(\{(\omega_1, \ldots, \omega_T)\}) = P(U_1 = \omega_1, \ldots, U_T = \omega_T)$, tzn. znajomość prawd. P jest równoważna znajomości rozkładu łącznego wektora $(U_1, \ldots, U_T)$.

Lemat 23

$(S_t^*,\ t \in \mathcal{T})$ jest martyngałem względem rozkładu prawdopodobieństwa P^* wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{t \le T-1} \quad \mathbb{E}_{P^*}[U_{t+1} | \mathcal{F}_t] = 1 + r.$$

Dowód:

$$\mathbb{E}_{P^*}\left[S_{t+1}^* | \mathcal{F}_t\right] = S_t^* \Leftrightarrow \mathbb{E}_{P^*}\left[\frac{S_{t+1}^*}{S_t^*} | \mathcal{F}_t\right] = 1 \Leftrightarrow \mathbb{E}_{P^*}\left[\frac{U_{t+1}}{1+r} | \mathcal{F}_t\right] = 1. \quad \square$$

Wniosek 24

Jeśli rynek jest wolny od arbitrażu, to $r \in (a, b)$.

Dowód:

Gdy rynek jest wolny od arbitrażu, to istnieje miara martyngałowa P^* dla S_t^* więc z lematu 23 mamy $\mathbb{E}_{P^*}[U_{t+1} | \mathcal{F}_t] = 1 + r$, czyli $\mathbb{E}_{P^*}[U_{t+1}] = 1 + r$.
Ale U_{t+1} przyjmuje z dodatnim prawdopodobieństwem wartości $1 + a$ oraz $1 + b$, więc średnia należy do wnętrza przedziału, tj. $(1 + r) \in (1 + a, 1 + b)$. $\square$

Z lematu 23 otrzymujemy istnienie miary martyngałowej, będącej miarą produktową, dla rynku CRR, gdy $r \in (a, b)$.

Twierdzenie 25

Niech $r \in (a, b)$. Jeśli P jest produktowym rozkładem prawdopodobieństwa wyznaczonym przez $p = \dfrac{r-a}{b-a}$, to proces S_t^* jest P-martyngałem.

Dowód:

Z definicji prawdopodobieństwa P i definicji U_t wynika niezależność zmiennych $U_1, \ldots, U_T$. Stąd i z postaci rozkładu U_{t+1} otrzymujemy

$$\mathbb{E}_P[U_{t+1} | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}_P[U_{t+1}] = p(1+b) + (1-p)(1+a) = 1 + r.$$

Teraz wystarczy skorzystać z lematu 23. $\square$

Jedyność miary martyngałowej wynika z następującego twierdzenia.

Twierdzenie 26

Jeśli rynek CRR jest wolny od arbitrażu, to jest zupełny.

Dowód.

Wniosek 27

Jeśli rynek CRR jest wolny od arbitrażu, to $U_1, \ldots, U_T$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie:

$$P(U_1 = 1 + b) = \frac{r - a}{b - a} = 1 - P(U_1 = 1 + a).$$

Założyliśmy, że stopa procentowa $r \geq 0$, więc od tego momentu mówiąc o modelu CRR bedziemy zawsze zakładać, że $r \in (a, b)$ oraz $r \geq 0$.

Twierdzenie 28

Cena arbitrażowa wypłaty X w modelu CRR jest dana wzorem

$$\Pi_t(X) = B_t \, \mathbb{E}_{P^*} \left[X B_T^{-1} \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad dla \;\; t \in \mathcal{T},$$

gdzie miara martyngałowa P^* jest wyznaczona przez $p = \dfrac{r-a}{b-a}$.

Dowód.
Ponieważ model rynku CRR jest wolny od arbitrażu i zupełny, wiec teza wynika natychmiast z Twierdzenia 18. □

Wniosek 29

Cena arbitrażowa europejskiej opcji kupna z terminem wykonania T i ceną wykonania K na akcję o cenie zadanej przez proces S jest równa

$$C_{T-t} = (1+r)^{-t} \sum_{j=0}^{t} \binom{t}{j} p^j (1-p)^{t-j} \left(S_{T-t} u^j d^{t-j} - K \right)^+ ,$$

gdzie $u = 1 + b$, $d = 1 + a$.

Dowód.

Problem replikacji

Problem replikacji wypłaty postaci $X = h(S_T)$ dla pewnego $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Gdy φ replikuje X, to

$$X = V_T(\varphi) = V_{T-1}(\varphi) + \varphi_T^1(S_T - S_{T-1}) + \varphi_T^0(B_T - B_{T-1}),$$

zatem

$$h(S_{T-1}U_T) = V_{T-1}(\varphi) + \varphi_T^1 S_{T-1}(U_T - 1) + \varphi_T^0 rB_{T-1}.$$

Ponieważ U_T przyjmuje dwie wartości $(1+a)$ i $(1+b)$, więc

na zbiorze $U_T = 1 + a$, mamy $h(S_{T-1}(1+a)) = V_{T-1}(\varphi) + \varphi_T^1 S_{T-1}a + \varphi_T^0 rB_{T-1}$;

na zbiorze $U_T = 1 + b$, mamy $h(S_{T-1}(1+b)) = V_{T-1}(\varphi) + \varphi_T^1 S_{T-1}b + \varphi_T^0 rB_{T-1}$.

Ponieważ proces φ_t^1 jest prognozowalny, wiec φ_T^1 nie zależy od wartości U_T. Zatem z powyższych równości otrzymujemy liczbę akcji i liczbę jednostek bankowych w chwili T:

$$\varphi_T^1 = \frac{h(S_{T-1}(1+b)) - h(S_{T-1}(1+a))}{S_{T-1}(b-a)},$$

$$\varphi_T^0 = \frac{1}{rB_{T-1}}\left[h(S_{T-1}(1+b)) - V_{T-1}(\varphi) - b\frac{h(S_{T-1}(1+b)) - h(S_{T-1}(1+a))}{b-a}\right].$$

Ćwiczenie

Portfel replikujący w chwili t ma postać

$$\varphi_t^1 = \frac{f(t, S_{t-1}(1+b)) - f(t, S_{t-1}(1+a))}{S_{t-1}(b-a)}, \tag{6}$$
$$\varphi_t^0 = \frac{(1+b)f(t, S_{t-1}(1+a)) - (1+a)f(t, S_{t-1}(1+b))}{(b-a)(1+r)^t}.$$

Na wzór (6) można spojrzeć jako na dyskretny analog pochodnej wartości portfela względem możliwej zmiany ceny instrumentu podstawowego. W języku finansów takie strategie nazywa się delta zabezpieczeniem.

Wniosek 30

Gdy h jest funkcją rosnąca, to $\varphi_t^1 \geq 0$. Zatem można replikować wypłatę $h(S_T)$ bez korzystania z krótkiej sprzedaży.

W szczególności wynika stąd, że można tak replikować wypłatę z europejskiej opcji kupna.

Opcje amerykańskie

Opcje amerykańskie

Opcja europejska - wypłata typu statycznego: następuje w ustalonej chwili T.
Opcja amerykańska - daje prawo realizacji w dowolnej chwili $0, 1, \ldots, T$.

Opcja amerykańska

Opcją amerykańską o terminie wygaśnięcia T nazywamy ciąg adaptowanych nieujemnych zmiennych losowych Z_t, $t \in \mathcal{T} = \{0, 1, \ldots T\}$.

Zmienną losową Z_t interpretujemy jako wypłatę otrzymaną z realizacji opcji amerykańskiej w chwili t, a ponieważ Z_t jest $\mathcal{F}_t$-mierzalne, to wypłata zależy od wiedzy w chwili t.

Przykład. Amerykańska opcja *kupna* na akcję o cenie S z ceną wykonania K (dodatnia stała) zadana jest przez $Z_t = (S_t - K)^+$, $t \in \mathcal{T}$. Kupujący otrzymuje prawo do zakupu akcji po cenie K w dowolnej chwili $0, 1, \ldots T$.
Analogicznie ciąg $Z_t = (K - S_t)^+$, $t \in \mathcal{T}$ zadaje amerykańską opcję *sprzedaży* na akcję o cenie S z ceną wykonania K.

- Posiadacz opcji decyduje, czy chwila jej wykonania właśnie nastąpiła i decyduje na podstawie wiedzy zebranej do tego momentu, więc $\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$, stąd moment wykonania τ jest momentem stopu.
- Sprzedawca opcji dostając za nią zapłatę U_0 musi postępować w taki sposób, aby w każdej chwili wartość jego portfela φ o kapitale początkowym U_0 przewyższała jego zobowiązania wobec kupca opcji, czyli

$$V_t(\varphi) \geq Z_t \quad \text{dla każdego } t. \tag{7}$$

Strategię φ nazywamy strategią zabezpieczającą opcję amerykańską $(Z_t)_{t\in\mathcal{T}}$.

$\Gamma((Z_t)_{t\in\mathcal{T}})$ - zbiór wszystkich strategii spełniających (7).
Dla dowolnego momentu stopu τ o wartościach w $\mathcal{T}$ mamy: $V_\tau(\varphi) \geq Z_\tau$.

Cena arbitrażowa

Ceną arbitrażową w chwili 0 opcji amerykańskiej zadanej przez ciąg wypłat $(Z_t)_{t\in\mathcal{T}}$ nazywamy wielkość

$$\Pi_0^a((Z_t)_{t\in\mathcal{T}}) = \inf\{V_0(\varphi) : \ \varphi \in \Gamma((Z_t)_{t\in\mathcal{T}})\}.$$

Momentem stopu nazywamy zmienną losową τ o wartościach w zbiorze $\{0, 1, \ldots, T\}$ taką, że dla każdego $t \leq T$ mamy $\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$.

Przykład. Dla akcji $S_0 = 10$ zmienna losowa
- $\tau_1 \equiv \min\{t : \ S_t \geq 20\}$ jest momentem stopu,
- $\tau_2 \equiv \max\{t : \ S_t \geq 20\}$ nie jest momentem stopu.

Nadmartyngałem nazywamy adaptowany proces stochastyczny $(Z_t)_{t\in\mathcal{T}}$ spełniający

$$\mathbb{E}[Z_t | \mathcal{F}_s] \leq Z_s, \quad 0 \leq s \leq t \leq T.$$

Chcemy znaleźć cenę $\Pi_0^a((Z_t)_{t\in\mathcal{T}})$.

- $\mathcal{M} = (B, S, \Phi)$ - rynek skończony, bez możliwości arbitrażu i zupełny z jednym instrumentem ryzykownym.
- Niech U_t - cena opcji amerykańskiej w chwili t. Zatem szukamy $U_0 = \Pi_0^a((Z_t)_{t\in\mathcal{T}})$.
- Wiemy, że $U_T = Z_T$. Skorzystamy z indukcji wstecznej.
- W chwili $T-1$ wystawca opcji musi mieć taki kapitał, aby zabezpieczyć jedną z wypłat: Z_{T-1} albo Z_T, gdyż każdą z nich może wybrać nabywca opcji.
- Rynek jest zupełny, więc wypłata Z_T jest osiągalna i jej cena w chwili $T-1$ wynosi:

$$B_{T-1}\,\mathbb{E}_{P^*}[Z_T B_T^{-1} | \mathcal{F}_{T-1}]$$

  - tyle trzeba mieć w chwili $T-1$, by zabezpieczyć wypłatę Z_T w chwili T.
  Stąd cena opcji amerykańskiej w chwili $T-1$:

$$U_{T-1} = \max(Z_{T-1}, B_{T-1}\,\mathbb{E}_{P^*}[Z_T^* | \mathcal{F}_{T-1}]).$$

- Analogicznie, cena opcji amerykańskiej w chwili t:

$$U_{t-1} = \max(Z_{t-1}, B_{t-1}\,\mathbb{E}_{P^*}[U_t B_t^{-1} | \mathcal{F}_{t-1}]),$$

  dla $t = 1, 2, \ldots, T$, gdyż wystawca musi zabezpieczyć jedną z wypłat:
  - natychmiastową w chwili $t-1$: Z_{t-1}
  - lub wypłatę w chwili późniejszej, a ona w chwili t jest warta U_t.

Twierdzenie 31

Zdyskontowana cena U_T^* opcji amerykańskiej zadanej przez ciąg wypłat $(Z_t)_{t\in\mathcal{T}}$ jest P^*-nadmartyngałem zadanym wzorem

$$U_{t-1}^* = \max(Z_{t-1}^*, \mathbb{E}_{P^*}[U_t^* \,|\, \mathcal{F}_{t-1}]). \tag{8}$$

Ze wzoru (8) wynika, ze ciąg $(U_t^*)_{t\in\mathcal{T}}$ jest obwiednią Snella ciągu $(Z_t)_{t\in\mathcal{T}}$, czyli że U_t^* jest najmniejszym P^*-nadmartyngałem dominującym ciąg Z_t^*.

Twierdzenie 32

1. U_0 *- cena w chwili* 0 *opcji amerykańskiej spełnia*

$$U_0 = \sup_{\tau\leq T} \mathbb{E}_{P^*}[Z_\tau^*],$$

gdy sup *bierzemy po momentach stopu τ o wartościach mniejszych lub równych T.*

2. *Istnieje strategia samofinansująca się φ o kapitale początkowym U_0 zabezpieczająca wypłatę z opcji amerykańskiej $(Z_t)_{t\in\mathcal{T}}$.*
3. *Moment stopu*

$$v = \inf\{t : \; Z_t = U_t\}$$

jest momentem realizacji opcji.

Uwaga:

1. Z twierdzenia mamy $\Pi_0^a((Z_t)_{t\in\mathcal{T}}) = \sup_{\tau\le T} \mathbb{E}_{P^*}[Z_\tau^*]$, czyli cena zdefiniowana wzorem
$$\Pi_0^a((Z_t)_{t\in\mathcal{T}}) = \inf\{V_0(\varphi): \ \varphi \in \Gamma((Z_t)_{t\in\mathcal{T}})\}$$
satysfakcjonuje także kupującego.
- Kupujący chce najlepiej wykorzystać swoje prawa i uzyskać jak największa wypłatę.
- Gdy kupujący realizuje opcję w momencie stopu τ i otrzymuje wypłatę Z_τ, to jest skłonny zapłacić za tę wypłatę $\mathbb{E}_{P^*}[Z_\tau^*]$.
- A ponieważ kupujący może zrealizować opcję w każdym momencie, więc za uczciwą cenę uważa $\sup_{\tau\le T} \mathbb{E}_{P^*}[Z_\tau^*]$.
2. Wystawca opcji stosuje strategię φ i czeka na to, co zrobi nabywca.
- Jeżeli nabywca zrealizuje opcję w chwili optymalnej τ, to $U_\tau = Z_\tau = V_\tau(\varphi)$. Wtedy sprzedawca stosując strategię φ otrzymuje całą kwotę, którą musi wypłacić nabywcy opcji. Sprzedawca zabezpieczył swoje zobowiązanie wobec nabywcy.
- Jeśli nabywca zrealizuje opcję w innej chwili τ_1 niż optymalna τ, to wystawca ma dodatni zysk.

Porównanie opcji amerykańskich i europejskich

Twierdzenie 33

Niech U_t będzie wartością w chwili t opcji amerykańskiej zadanej przez $(Z_t)_{t \in \mathcal{T}}$, a C_t wartością w chwili t opcji europejskiej o wypłacie $X = Z_T$. Wtedy

$$U_t \geq C_t.$$

Ponadto, gdy dla każdego $t \leq T$ zachodzi

$$C_t \geq Z_t,$$

to dla każdego $t \leq T$ mamy

$$U_t = C_t.$$

Dowód.

Wniosek 34

Ceny amerykańskiej i europejskiej opcji kupna z tym samym terminem wygaśnięcia i tą samą ceną wykonania są równe.

Dowód.