Model Blacka-Scholesa

Aksjomaty procesu cen

Model I: Louis Bachelier, 1900

- Modelowanie dynamiki ceny akcji na giełdzie paryskiej za pomocą procesów otrzymanych z przejść granicznych błądzeń losowych;
  czyli modelowanie ceny ciągłymi procesami S_t o przyrostach niezależnych, takimi że przy zmianie czasu o Δt zmiana ceny $S_{t+\Delta t} - S_t$ zachowuje się jak $\sqrt{\Delta t}$ dla małych przyrostów Δt.
- postulaty te oznaczają, że proces cen powinien mieć postać

$$S_t = S_0 + \mu t + \sigma W_t, \quad \mu \in \mathbb{R},\ \sigma > 0,\ W_t - \text{proces Wienera},$$
$$S_t \sim N(S_0 + \mu t, \sigma^2 t).$$

- Stąd cena akcji może przyjmować ujemne wartości z dodatnim prawdopodobieństwem, więc model ten jest często odrzucany (jednak z *reguły trzech sigm* dla małych t: $P(S_0 - 3\sigma\sqrt{t}) \leq S_t \leq S_0 + 3\sigma\sqrt{t}) \approx 0.997$; ponadto często w statystyce używa się rozkładu normalnego do modelowania wielkości nieujemnych np. długości, co nie wzbudza wątpliwości).
- Rozkład przyrostu ceny na ustalonym przedziale czasowym jest taki sam, niezależnie od ceny początkowej. Zatem szansa, że cena akcji sprzedawanej po 50 j. spadnie w tym okresie do 45 (strata 10%) jest taka sama, jak szansa, ze akcja o cenie 10 spadnie do 5 (strata 50%).
- Praca Bacheliera była zbyt nowatorska jak na ówczesne czasy i bardzo szybko została zapomniana. Odkryto ja ponownie dopiero w latach 70. XX w.

Model II: Paul A. Samuelson, 1965

- Ceny są dodatnie: $\forall_{t\geq 0}\ S_t > 0$, S_0-stała.
- Procentowa zmiana cen akcji nie zależy od ceny obecnej i cen w przeszłości:
$$\forall_{t,h\geq 0}\ \ \frac{S_{t+h}}{S_t}\quad \text{jest niezależne od}\quad \sigma(S_u:\ u\leq t).$$
- Zmiana ta zależy tylko od długości odcinka czasu, na którym jest rozpatrywana, nie jest istotne, od którego momentu ją liczymy:
$$\forall_{t,h\geq 0}\ \frac{S_{t+h}}{S_t}\sim\frac{S_h}{S_0}.$$
- Proces S_t ma ciągłe trajektorie.
- Przy tych założeniach: $S_t = S_0\exp(at+\sigma W_t)$, $a\in\mathbb{R}, \sigma>0$, a więc proces cen jest geometrycznym procesem Wienera ($\ln S_t$ - stacjonarny, o przyrostach niezależnych i ciągłych trajektoriach).
- Aby nadać sens ekonomiczny należy przyjąć $a=\mu-\frac{\sigma^2}{2}$, $\mu\in\mathbb{R}$. Wtedy
$$S_t = S_0\exp\left(\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma W_t\right).$$
Wtedy S_t ma rozkład lognormalny:
$$\ln S_t\sim N\left(\ln S_0+\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t,\ \sigma^2 t\right).$$

Model II: sens ekonomiczny stałych μ, σ

Niech V_t - wartość portfela w chwili t.
Oczekiwana stopa zwrotu i wariancja stopy zwroty na jednostkę czasu z tego portfela w czasie od s do t dla $s < t$:

$$\frac{1}{t-s}\mathbb{E}\left[\frac{V_t - V_s}{V_s}\right], \qquad \frac{1}{t-s}\mathrm{Var}\left[\frac{V_t - V_s}{V_s}\right].$$

Gdy portfel składa się z jednej akcji to $V_t = S_t$.

Gdy S - geometryczny proces Wienera, to

$$\lim_{u \to t^-} \frac{1}{t-u}\mathbb{E}\left[\frac{S_t - S_u}{S_u}\right] = \mu, \qquad \lim_{u \to t^-} \frac{1}{t-u}\mathrm{Var}\left[\frac{S_t - S_u}{S_u}\right] = \sigma^2.$$

Stąd

- μ - współczynnik wzrostu cen akcji (stopa aprecjacji); odzwierciedla stałe tendencje zmian cen akcji,
- σ - współczynnik zmienności cen akcji.

Model III: Black-Scholes-(Merton), 1973

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - przestrzeń probabilistyczna z filtracją $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$, na której zadany jest proces Wienera, $T < \infty$.
- Rynek jest idealny.
- Akcje nie płacące dywidend o cenie:
$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad \sigma > 0,\ \mu \in \mathbb{R}\,.$$
Jedynym rozwiązaniem jest
$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W_t\right).$$
- Rachunek bankowy o stałej stopie procentowej $r \geq 0$ w okresie $[0, T]$ i ciągłej kapitalizacji:
$$dB_t = rB_t dt, \quad B_0 = 1.$$
Jedynym rozwiązaniem jest
$$B_t = e^{rt}.$$
- Na rynku wszyscy mają taką samą wiedzę. Informacje są otrzymywane wyłącznie z obserwacji procesu cen S, zatem $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^S$.

  Ponadto z jedyności rozwiązania równania na S_t: $\mathcal{F}_t^W = \mathcal{F}_t^S$.

  Zatem $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^W$ i $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$.
- Ten model jest znacznym uproszczeniem rzeczywistości. Jego zaletą są proste założenia zrozumiałe dla wszystkich. Stąd służy jako pierwsze przybliżenie.

Strategia

Strategia to dowolny proces mierzalny adaptowany $\varphi \in (\varphi^0, \varphi^1)$, spełniający

$$\int_0^T |\varphi_s^0| ds < \infty, \qquad \int_0^T (\varphi_s^1)^2 ds < \infty. \tag{9}$$

Proces wartości portfela (strategii)

$$V_t(\varphi) = \varphi_t^0 B_t + \varphi_t^1 S_t.$$

Proces zysków kapitałowych

$$G_t(\varphi) = \int_0^t \varphi_u^0 dB_u + \int_0^t \varphi_u^1 dS_u, \quad t \in [0, T].$$

Z postaci równania zadającego proces cen mamy

$$\int_0^t \varphi_u^1 dS_u = \int_0^t \varphi_u^1 \mu S_u du + \int_0^t \varphi_u^1 \sigma S_u dW_u.$$

Warunek (9) oraz fakt, że cena S jest procesem ciągłym zapewniają istnienie całek występujących w definicji procesu zysku.

Strategia samofinansująca się

$$\forall_{t\in[0,T]} \quad V_t(\varphi) = V_0(\varphi) + G_t(\varphi).$$

Równoważnie

$$V_t(\varphi) = V_0(\varphi) + \int_0^t \varphi_u^0 r B_u du + \int_0^t \varphi_u^1 \mu S_u du + \int_0^t \varphi_u^1 \sigma S_u dW_u.$$

$$dV_t(\varphi) = \varphi_t^0 dB_t + \varphi_t^1 dS_t = \varphi_t^0 r B_t dt + \varphi_t^1 \mu S_t dt + \varphi_t^1 \sigma S_t dW_t.$$

Portfel φ jest samofinansujący się, gdy nie ma dopływu kapitału z zewnątrz - zmiany wartości portfela wynikają tylko z naszej polityki, czyli z postaci portfela i ze zmian cen.

Φ - klasa wszystkich strategii samofinansujących się.

Arbitraż

Arbitraż to strategia $\varphi \in \Phi$, taka że dla pewnego $P \in \mathcal{P}$

$$V_0(\varphi) = 0, \quad P(V_T(\varphi) \geq 0) = 1, \quad P(V_T(\varphi) > 0) > 0.$$

Istnienie arbitrażu świadczy o braku równowagi na rynku. Na istniejących rynkach finansowych działają arbitrażyści i nie ma możliwości arbitrażu. Zatem modele opisujące rzeczywistość powinny być wolne od arbitrażu.

Wypłata europejska (aktywo pochodne lub kontrakt europejski)

Wypłatą europejską z momentem wykonania T nazywamy zmienną losową X.

Strategia replikująca

$\varphi \in \Phi$ jest strategią replikującą wypłatę X w chwili T, gdy $V_T(\varphi) = X$ (strategia φ jest zabezpieczeniem wypłaty X).

Wypłata osiągalna

Jeśli wypłata X ma chociaż jedną strategię replikującą, to jest osiągalna.

Bogactwo wypłaty osiągalnej (tzn. jednoznaczna replikowalność)

Mówimy, że istnieje proces bogactwa osiągalnej wypłaty X, gdy dla dowolnych strategii $\varphi, \psi \in \Phi$, takich, że $V_T(\varphi) = V_T(\psi) = X$ procesy $V(\varphi)$ i $V(\psi)$ są nieodróżnialne, tzn. $P(\forall_{t \leq T} : \; V_t(\varphi) = V_t(\psi)) = 1$.

Cena arbitrażowa

Niech $\Psi \subset \Phi$. Na rynku $\mathcal{M} = (B, S, \Psi)$ bez możliwości arbitrażu cena arbitrażowa $\Pi_t(X)$ w chwili t osiągalnej wypłaty europejskiej X, dla której istnieje proces bogactwa nazywamy wartość w chwili t strategii samofinansującej się replikującej wypłatę:

$$\Pi_t(X) = V_t(\varphi).$$

Uwaga: Wybór klasy strategii $\Psi \subset \Phi$ jest istotny. Nie można wziąć, jak dla rynku skończonego, $\Psi = \Phi$, gdyż prowadzi to do arbitrażu.

Dyskontowanie

$$B_t^* = \frac{B_t}{B_t} \equiv 1, \qquad S_t^* = \frac{S_t}{B_t} = S_t e^{-rt}.$$

Miara martyngałowa

Miarę probabilistyczną P^* na $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ nazywamy miarą martyngałową, gdy $P^* \sim P$ i S^* jest P^*-martyngałem lokalnym.

Jeżeli dla procesu adaptowanego $M = (M_t)_{t<T}$ istnieje ciąg momentów zatrzymania $\tau_n \nearrow T$ taki, że M_{τ_n} jest martyngałem, to M nazywamy *martyngałem lokalnym*.

Twierdzenie 35

Miara probabilistyczna P^* o gęstości

$$\frac{dP^*}{dP} = \exp\left(\frac{r-\mu}{\sigma} W_T - \frac{1}{2}\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right)^2 T\right)$$

jest jedyną miarą martyngałową. Ponadto proces S^* jest P^*-martyngałem o dynamice

$$dS^*_t = \sigma S^*_t d\widetilde{W}_t, \quad S^*_0 = s, \tag{10}$$

gdzie $\widetilde{W}_t = W_t - \frac{r-\mu}{\sigma} t$ *jest procesem Wienera względem P^* i filtracji $\mathbb{F}$.*

Dowód.

Uwaga: Warunek (10) można zapisać równoważnie

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\widetilde{W}_t, \tag{11}$$

ponieważ

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t = rS_t dt + \sigma S_t d\widetilde{W}_t.$$

Zatem przy zamianie miary na równoważną miarę martyngałową współczynnik zmienności ceny akcji nie ulega zmianie.

Uwaga: Z (11) wynika, że przy mierze martyngałowej P^* proces cen ma postać

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma \widetilde{W}_t\right).$$

Twierdzenie 36

Strategia $\varphi = (\varphi^0, \varphi^1)$ *jest strategią samofinansującą się wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi*

$$\forall_{t\in[0,T]} V_t^*(\varphi) = V_0(\varphi) + \int_0^t \varphi_u^1 dS_u^*. \tag{12}$$

Dowód.

Twierdzenie 37

Miara P^* *jest miarą martyngałową dla* S^* *wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej strategii samofinansującej się* φ *zdyskontowany proces bogactwa* $V^*(\varphi)$ *jest* P^**-martyngałem lokalnym.*

Dowód.

Rozpatrywanie rynku ze wszystkimi możliwymi strategiami samofinansującymi się prowadzi do arbitrażu. Należy ograniczyć klasę strategii do strategii dopuszczalnych.

Strategia dopuszczalna

Niech P^* będzie miarą martyngałową dla S^*. Strategię $\varphi \in \Phi$ nazywamy dopuszczalną (P^*-dopuszczalną), gdy proces

$$\int_0^t \varphi_u^1 dS_u^*$$

jest P^*-martyngałem.

$\Phi(P^*)$ - zbiór strategii P^*-dopuszczalnych.

Uwaga: Gdy $\varphi \in \Phi$, to z (12) wynika, że $V_t^*(\varphi) = V_0^*(\varphi) + \int_0^t \varphi_u^1 dS_u^*$, a stąd jeśli $\varphi \in \Phi(P^*)$, to proces $V_t^*(\varphi)$ jest P^*-martyngałem.

Twierdzenie 38

Rynek $(B, S, \Phi(P^*))$ *jest wolny od arbitrażu.*

Dowód.

Model Blacka-Scholesa

Trójkę $\mathcal{M} = (B, S, \Phi(P^*))$ nazywamy klasycznym modelem Blacka-Scholesa rynku finansowego (w skrócie modelem Blacka-Scholesa; lub modelem Blacka-Mertona-Scholesa).

Wycena i zabezpieczenie w modelu Blacka-Scholesa

Wycena ogólnej wypłaty

Zakładamy: $\mathcal{M} = (B, S, \Phi(P^*))$ - klasyczny model Blacka-Scholesa bez arbitrażu.

Twierdzenie 39

Niech X będzie wypłatą osiągalną w $(B, S, \Phi(P^*))$. Wtedy cena arbitrażowa $\Pi_t(X)$ wypłaty X jest dobrze określona i jest dana przez formułę wyceny neutralną względem ryzyka:

$$\Pi_t(X) = B_t \, \mathbb{E}_{P^*}[X B_T^{-1} | \mathcal{F}_t], \quad t \in [0, T].$$

Dowód. (analogiczny do dowodu w przypadku dyskretnym)

Uwaga: Ponieważ $\mathcal{F}_0$ jest σ-ciałem zbiorów P-trywialnych, zatem i P^*-trywialnych, $B_0 = 1$, to

$$\Pi_0(X) = \mathbb{E}_{P^*}[X B_T^{-1}].$$

Uwaga: Jeśli X jest wypłatą osiągalną w $\mathcal{M}$, to mamy dobrze określoną cenę arbitrażową X w każdej chwili i

$$\Pi_t(X) B_t^{-1} = \mathbb{E}_{P^*}[X B_T^{-1} | \mathcal{F}_t], \quad t \in [0, T],$$

więc zdyskontowana cena jest P^*-martyngałem.

Twierdzenie 40

W modelu Blacka-Scholesa każda wypłata, która jest całkowalna z kwadratem względem P^* jest osiągalna.

Dowód.

Twierdzenie 41

Jeśli wypłata $X = f(S_T)$ jest całkowalna z kwadratem względem miary martyngałowej, to

$$\Pi_t(X) = F(t, S_t) = e^{-r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f\left(S_t\, e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma y\sqrt{T-t}}\right) e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy.$$

Gdy ponadto F należy do klasy $C^{1,2}((0,T)\times\mathbb{R})$, to portfel φ zadany wzorem

$$\varphi_t^0 = e^{-rt}\left(F(t,S_t) - \varphi_t^1 S_t\right), \qquad \varphi_t^1 = \frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t)$$

jest dopuszczalny i replikuje X.

Dowód.

Wycena opcji europejskich

Twierdzenie 42

Cena arbitrażowa $C_t = C(t, T, S_t, K)$ *w chwili* $t \in [0, T]$ *europejskiej opcji kupna z ceną wykonania* K *i momentem wykonania* T *na rynku Blacka-Scholesa jest równa*

$$C_t = S_t N(d_1(T-t, S_t)) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2(T-t, S_t))$$

dla $t \in [0, T]$, *gdzie*

$$d_1(T-t, S_t) = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \tag{13}$$

$$d_2(T-t, S_t) = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1(T-t, S_t) - \sigma\sqrt{T-t}, \tag{14}$$

a N *jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego* $\mathcal{N}(0, 1)$.

Ponadto, dopuszczalna strategia replikująca ma postać

$$\varphi_t^0 = -Ke^{-rt} N(d_2(T-t, S_t)), \qquad \varphi_t^1 = N(d_1(T-t, S_t)).$$

Dowód.

Uwaga: Z twierdzenia mamy $C_0 = S_0 N(d_1(T, S_0)) - Ke^{-rT} N(d_2(T, S_0))$.

Uwaga: Ponieważ $\varphi_t^1 = N(d_1(T-t, S_t)) > 0$, to portfel replikujący nie korzysta z krótkiej sprzedaży.

Parytet kupna-sprzedaży

$$C(t, T, S_t, K) - P(t, T, S_t, K) = S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

dla $t \in [0, T]$, gdzie $C(t, T, S_t, K)$ i $P(t, T, S_t, K)$ oznaczają cenę w chwili t odpowiednio opcji kupna i sprzedaży o cenie wykonania K i terminie T.

Wniosek 43

Cena arbitrażowa $P_t = P(t, T, S_t, K)$ w chwili $t \in [0, T]$ europejskiej opcji sprzedaży z ceną wykonania K i momentem wykonania T na rynku Blacka-Scholesa wynosi

$$P_t = -S_t N(-d_1(T-t, S_t)) + Ke^{-r(T-t)} N(-d_2(T-t, S_t))$$

dla $t \in [0, T]$, gdzie d_1 i d_2 zadane są wzorami (13), (14).

Portfel replikujący ma postać

$$\varphi_t^0 = Ke^{-rt} N(-d_2(T-t, S_t)), \qquad \varphi_t^1 = -N(-d_1(T-t, S_t)).$$

Analiza wrażliwości cen opcji

Żadna z wielkości występujących w formułach Blacka-Scholesa nie zależy od oczekiwanej stopy zwrotu inwestora μ (zatem od jego oceny ryzyka i preferencji). Zależą one od:

- bieżącej ceny akcji S_t,
- ceny wykonania K,
- czasu $T - t$ pozostałego do realizacji opcji,
- współczynnika zmienności σ,
- stopy procentowej bez ryzyka r.

Osoby zarządzające ryzykiem w instytucjach finansowych są zainteresowane tym, jak bardzo mogą zmienić się ceny opcji w ich portfelach inwestycyjnych, gdy zmienia się dokładnie jeden z powyższych parametrów, gdyż takie zmiany mają wpływ na wartość całego portfela.

Rozważamy cenę opcji kupna w chwili $t = 0$:

$$C = C_0 = C(S_0, 0, T, K) = C(S_0, 0, T, K, \sigma, r).$$

Wtedy funkcja C jest

- rosnąca jako funkcja zmiennej S_0 - bieżącej ceny akcji.
- malejąca jako funkcja zmiennej K - ceny wykonania.
- rosnąca jako funkcja czasu pozostałego do realizacji opcji.
- rosnąca jako funkcja zmiennej σ - współczynnika zmienności.
- rosnąca jako funkcja zmiennej r - stopy procentowej bez ryzyka.

Szukanie współczynnika zmienności ceny akcji

W praktyce, by obliczyć cenę opcji musimy znać współczynnik zmienności σ. Jest to wielkość rynkowa i trzeba ją znaleźć patrząc na zachowanie rynku.

Metoda zmienności historycznej (*historic volatility*)

- n - liczba obserwacji w chwilach $t_1, t_2, \ldots, t_n$, w równych odstępach czasu.
- r - długość przedziału czasu pomiędzy obserwacjami (liczona w latach).
- s_i - zaobserwowana cena akcji na końcu i-tego przedziału czasu ($i = 1, \ldots, n$).
- $\bar{S}_i$ - teoretyczna cena akcji na końcu i-tego przedziału: $\bar{S}_i = S_{t_i}$.
- $U_i = \frac{\bar{S}_i}{\bar{S}_{i-1}}$ - logarytmiczne zwroty cen. Wtedy $\bar{S}_i = \bar{S}_{i-1} e^{U_i}$, stąd U_i - ciągła stopa zwrotu w i-tym przedziale (ale nie w skali roku).

  Zmienne losowe U_i są niezależne o jednakowym rozkładzie $\mathcal{N}\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \sigma^2\tau\right)$.
- Z rynku mamy obserwacje cen $s_1, s_2, \ldots, s_n$, stąd wyznaczamy $u_1, u_2, \ldots, u_n$.
- Odchylenie standardowe zmiennej losowej U_i: $\sigma\sqrt{\tau}$.
- Estymator odchylenia standardowego U_i niezależny od wartości średniej:

$$\hat{\sigma}_U = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i - \bar{u})^2}, \quad \text{gdzie } \bar{u} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i.$$

- $\hat{\sigma}_U$ estymuje $\sigma\sqrt{\tau}$, więc σ jest estymowany przez $\hat{\sigma} = \frac{\hat{\sigma}_U}{\sqrt{\tau}}$. Błąd estymacji: $\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{2n}}$.

- Im większe n, tym lepszy estymator, ale używamy starszych danych, a model Blacka-Scholesa w miarę poprawnie opisuje rynek dla krótkich okresów czasu.
- Z badań empirycznych wynika, że dla długich okresów czasu σ zmienia się w czasie (nie jest stacjonarne).
- Zawsze szacowanie przyszłej wartości σ na podstawie przeszłości obarczone jest błędem.
- Należy wybrać taki okres czasu, by estymator miał dobre własności i jednocześnie na tyle krótki, że założenie, iż rynek jest opisany przez model Blacka-Scholesa można zaakceptować. Na ogół przyjęcie długości okresu czasu używanego do estymacji jest dyktowane doświadczeniem osoby wykonującej takie szacowania.

Metoda historyczna nie uwzględnia możliwych zmian wielkości parametru σ (czyli tego, że po pewnym czasie rynek opisuje model Blacka-Scholesa z inną zmiennością).

Metoda zmienności implikowanej (*implied volatility*)

- Opiera się na przekonaniu, ze zmienność jest zdeterminowana przez rynek.
- Cena opcji jest rosnącą funkcją parametru σ, gdy pozostałe czynniki są stałe.
- Zatem znając z rynku wielkości: $S_t, K, T-t, r$ i $C_{obs} = C_{obs}(S_t, t, T, K, r)$ (cena opcji obserwowana na rynku) możemy znaleźć tę wartość σ, przy której cena teoretyczna opcji jest równa cenie rynkowej: $C_{obs} = C_t$.

Niech r, t, T, K, S_t będą ustalone i znane. Zmiennością implikowaną $\sigma_{imp} = \sigma_{imp}(K, T)$ nazywa się tę dodatnią wielkość I, dla której

$$C_{obs}(t, T, K) = C_t(S_t, t, T, K, I, r). \tag{15}$$

Gdy

$$C_{obs}(S_t, t, T, K) > \lim_{\sigma \to 0^+} C(S_t, t, T, K, \sigma, r),$$

to istnieje dokładnie jedno dodatnie rozwiązanie (15), co wynika z

$$\frac{\partial C_0}{\partial \sigma} = se^{-\frac{1}{2}d_1^2} \frac{\sqrt{T}}{2\sqrt{2\pi}} > 0$$

(b.z.o. zakładamy $t = 0$). Tym rozwiązaniem jest σ_{imp}.

- Gdy ustalimy czas do wygaśnięcia opcji T, a rynek jest opisany przez model Blacka-Scholesa to σ_{imp} powinno być stałe i równe σ z modelu.
- W rzeczywistości, gdy używa się opcji o różnych cenach wykonania dla tej samej akcji, tzn. rozpatrujemy funkcję $K \to \sigma_{imp}(K)$ (*implikowana krzywa zmienności*), to σ_{imp} jako funkcja zmiennej K nie jest stała, ma miejsce tzw. *efekt uśmiechu zmienności* (implikowana krzywa zmienności jest wypukła i ma minimum).
- W praktyce otrzymuje się różne kształty wykresu funkcji. Stąd różne metody znajdowania σ_{imp}:
  - Branie odpowiednio ważonej średniej ze współczynników zmienności implikowanej obliczanych dla rożnych opcji (najlepiej brać te opcje, których cena jest bardziej czuła na zmiany σ).
  - Wybór σ_{imp} tak, aby ceny teoretyczne n wybranych opcji były jak najbliższe cen rynkowych tych opcji:

    $$C_{obs}(t, T_i, K_i) = C_t(S_t, t, T_i, K_i, \sigma_{imp}, r), \quad i = 1, \dots, n.$$

    Zwykle wybiera się kryterium metody najmniejszych kwadratów, tzn. rozwiązuje się problem minimalizacji

    $$\min_{\sigma} \sum_{i=1}^{n} (C^i_{obs} - C^i)^2.$$
  - Modyfikacja modelu, w której parametr σ przestaje być stały (są to modele stochastycznej zmienności).

Z punktu widzenia praktyka.

Pytanie. Po co szukać σ, skoro na rynku mamy ceny opcji kupna i sprzedaży zadane przez prawo popytu i podaży na rynku? Do handlowania tymi opcjami nie trzeba znać σ.

Odpowiedź. Prawda, ale mając σ mamy dobrze opisany model cen i model rynku. Wtedy

- potrafimy wyceniać opcje egzotyczne i opcje tworzone na żądanie, których ceny nie są dostępne na rynku w każdej chwili, gdyż nie są to instrumenty płynne;
- znajomość współczynnika zmienności σ jest niezbędna do konstruowania portfeli zabezpieczających.

Opcje amerykańskie w modelu Blacka-Scholesa

Opcje amerykańskie

Niech $g : [0, T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ będzie funkcją ciągłą.

Opcja amerykańska

Opcją amerykańską (*american contingent claim*) z funkcją wypłaty g nazywamy instrument finansowy określony przez:

- moment wygaśnięcia T,
- wypłatę w chwili t równą $Z_t = g(t, S_t)$,
- moment realizacji opcji - jest to moment stopu τ względem filtracji $(\mathcal{F}_t)$ przyjmujący wartości w $[0, T]$, a zatem wypłata w momencie realizacji jest równa
$$X^a = g(\tau, S_\tau).$$

Uwaga: Moment wykonania jest elementem rodziny $\mathcal{T}_{[0,T]}$, czyli rodziny momentów stopu o wartościach w $[0, T]$. Wypłata zależy od wartości akcji S_τ w chwili realizacji, a nie od całej trajektorii S do momentu τ.

Równoważne terminy:

- opcja amerykańska z funkcją wypłaty g,
- opcja amerykańska z procesem wypłaty Z_t,
- opcja amerykańska o wypłacie X^a.

Przykłady: opcja kupna i sprzedaży o wypłatach w chwili realizacji odpowiednio $X^a = (S_\tau - K)^+$, $Y^a = (K - S_\tau)^+$.

Strategia "kup i trzymaj" (*buy-and-hold*)

Strategia "kup i trzymaj" związana z opcją amerykańską o wypłacie X^a to para

$$(c, \tau), \qquad c \in \mathbb{R}, \quad \tau \in \mathcal{T}_{[0,T]}.$$

Interpretacja:
- gdy $c > 0$, to kupujemy c jednostek opcji amerykańskiej w chwili 0,
- gdy $c < 0$, to przeprowadzamy krótką sprzedaż tych jednostek w chwili 0 i trzymamy je w portfelu do momentu τ, w którym zamykamy pozycję.

Strategia samofinansująca się

Strategia samofinansująca się dla modelu (B, S, X^a) to trójka (φ, c, τ), gdzie
- $\varphi = (\varphi^0, \varphi^1)$ - strategia samofinansująca się w modelu Blacka-Scholesa:

$$V_t(\varphi) = \varphi_t^0 B_t + \varphi_t^1 S_t, \qquad V_t(\varphi) = V_0(\varphi) + \int_0^t \varphi_u^0 dB_u + \int_0^t \varphi_u^1 dS_u.$$

- (c, τ) - strategia "kup i trzymaj" związana z X^a i taka, że dla $t \in (\tau, T]$ zachodzi

$$\varphi_t^1 = 0, \qquad \varphi_t^0 = \varphi_\tau^0 + \frac{\varphi_\tau^1 S_\tau}{B_\tau} + \frac{cg(\tau, S_\tau)}{B_\tau}.$$

W definicji strategii samofinansującej się zakładamy, że gdy wypłata amerykańska jest realizowana w momencie τ, to pozycja w aktywie jest w tym momencie zamykana i wszystko co pozostaje, jest wkładane na rachunek oszczędnościowy.

Na rynku mamy nowy instrument bazowy - opcje amerykańskie.

Oznaczamy: φ^2 - liczba opcji w portfelu.
Wtedy strategię "kup i trzymaj" zapisujemy: $\varphi_t^2 = c\,\mathbf{1}_{[0,\tau)}(t)$.

Gdy U_0 jest wartością w chwili 0 opcji amerykańskiej z wypłatą X^a, to wartości portfela $\bar{\varphi} = (\varphi, c, \tau) = (\varphi^0, \varphi^1, \varphi^2)$ w momencie początkowym i końcowym wynoszą:

$$V_0(\bar{\varphi}) = \varphi_0^0 + \varphi_0^1 S_0 + cU_0,$$
$$V_T(\bar{\varphi}) = \varphi_T^0 B_T = \left(\varphi_\tau^0 + e^{-r\tau}\varphi_\tau^1 S_\tau + e^{-r\tau} cg(\tau, S_\tau)\right) e^{rT}.$$

Portfel dopuszczalny

Portfel samofinansującej się strategii $\bar{\varphi}$ jest dopuszczalny, gdy strategia φ jest dopuszczalna.
Oznaczamy: Ψ - klasa strategii dopuszczalnych.

Klasa portfeli arbitrażowych

$$\mathcal{A} := \{\bar{\varphi}\ :\ V_0(\bar{\varphi}) < 0,\ V_T(\bar{\varphi}) \geq 0,\ \bar{\varphi} - \text{ strategia dopuszczalna}\}.$$

Równoważnie jest to klasa portfeli dopuszczalnych $\bar{\varphi}$, takich że

$$V_0(\bar{\varphi}) = 0, \quad V_T(\bar{\varphi}) \geq 0, \quad P(V_T(\bar{\varphi}) > 0) > 0,$$

Arbitraż

Na rynku (B, S, X^a, Ψ) z ceną początkową U_0 wypłaty X^a istnieje arbitraż, gdy zachodzi jeden z warunków:

- istnieje arbitraż związany z pozycją długą (tj. posiadacza opcji amerykańskiej), czyli gdy istnieje moment stopu $\tau \in \mathcal{T}_{[0,T]}$ taki, że dla pewnego φ strategia $\psi = (\varphi, 1, \tau) \in \mathcal{A}$,
- istnieje arbitraż związany z pozycją krótką (tj. wystawcy opcji amerykańskiej), czyli gdy istnieje strategia φ, taka że dla wszystkich momentów stopu $\tau \in \mathcal{T}_{[0,T]}$ strategia $\psi = (\varphi, -1, \tau) \in \mathcal{A}$.

Te dwa rodzaje arbitrażu wynikają z niesymetrycznej pozycji sprzedawcy i nabywcy opcji amerykańskiej. Nabywca może wybrać termin wykonania, a sprzedawca musi zabezpieczyć wypłatę.

Z definicji wynika, że na rynku nie ma arbitrażu, gdy zachodzą dwa warunki:

a) dla wszystkich φ i wszystkich τ mamy $(\varphi, 1, \tau) \notin \mathcal{A}$;

b) dla każdego φ istnieje τ, takie że $(\varphi, -1, \tau) \notin \mathcal{A}$.

Punkt a) mówi, że posiadacz opcji amerykańskiej nie może znaleźć momentu wykonania opcji τ i strategii φ działania na rynku akcji i rachunku bankowego dających zysk bez ryzyka.

Punkt b) oznacza, że niezależnie od tego, jaką politykę prowadzi sprzedawca opcji (czyli niezależnie od φ), nabywca może wybrać taki moment wykonania τ, że sprzedawca nie ma zysku bez ryzyka.

Cena arbitrażowa

Cena arbitrażowa opcji amerykańskiej X^a nazywamy cenę U_0, dla której opisany model rynku jest modelem wolnym od arbitrażu.

Brak arbitrażu prowadzi do istnienia jednoznacznie wyznaczonej ceny arbitrażowej.

Twierdzenie 44

Niech $g(t,x)$ będzie funkcją o liniowym wzroście: $|g(t,x)| \leq Ax + B$. Załóżmy, że na rynku (B, S, X^a, Ψ) nie ma możliwości arbitrażu. Wtedy cena arbitrażowa w chwili t opcji amerykańskiej z funkcją wypłaty g jest równa:

$$\Pi_t^a(X^a) = essup_{\tau \in \mathcal{T}_{[t,T]}} \mathbb{E}_{P^*} \left[e^{-r(T-t)} g(\tau, S_\tau) \middle| \mathcal{F}_t \right], \tag{16}$$

gdzie P^* jest miarą martyngałową dla rynku Blacka-Scholesa $(B, S, \Phi(P^*))$.

Supremum istotne rodziny zmiennych losowych $\{\xi_i\}_{i \in I}$ to jedyna zmienna losowa η:

1. $\xi_i \leq \eta$ P-p.n. dla każdego i,
2. jeśli $\xi_i \leq \gamma$ P-p.n. dla każdego i, to $P(\eta \leq \gamma) = 1$.

Zachodzi też twierdzenie odwrotne: warunek $U_0 = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{[0,T]}} \mathbb{E}_{P^*} \left[e^{-r\tau} g(\tau, S_\tau) \right]$ implikuje, że na rynku (B, S, X^a, Ψ) nie ma arbitrażu.

Można udowodnić, że istnieje portfel dopuszczalny φ, spełniający warunki

$$V_0(\varphi) = U_0, \qquad V_t(\varphi) \geq g(S_t, t),$$

czyli φ jest portfelem zabezpieczającym opcję amerykańską z kapitałem początkowym równym cenie opcji amerykańskiej. Dla tego portfela zachodzi $V_{\tau_0}(\varphi) = g(S_{\tau_0}, \tau_0)$. Ze wzoru (16):

$$\Pi_t^a(X^a) = essup_{\tau \in \mathcal{T}_{[t,T]}} \mathbb{E}_{P^*} \left[e^{-r(T-t)} g(\tau, S_\tau) \middle| \mathcal{F}_t \right],$$

wynika (tak jak w przypadku dyskretnym), że cena opcji amerykańskiej o wypłacie $(Z_t)_{t \leq T}$ jest nie mniejsza niż cena opcji europejskiej o wypłacie Z_T. Ponadto:

Twierdzenie 45

Europejska opcja kupna i standardowa amerykańska opcja kupna o tym samym terminie zapadalności i tej samej cenie wykonania mają równe ceny.

Z twierdzenia wynika, że w celu znalezienia ceny amerykańskiej opcji kupna możemy korzystać ze wzoru Blacka-Scholesa na cenę europejskiej opcji kupna.

W przypadku opcji sprzedaży cena amerykańska opcji jest różna od ceny europejskiej.
Nie istnieje postać jawna ceny amerykańskiej opcji sprzedaży.
Do obliczenia tej ceny stosuje się inne metody: metody Monte Carlo, metody quasi Monte Carlo, metody aproksymacji modelem CRR lub metody numeryczne związane z rozwiązywaniem równań różniczkowych cząstkowych.

Opcje egzotyczne w modelu Blacka-Scholesa

Opcje egzotyczne

To opcje inne niż standardowe opcje kupna/sprzedaży europejskie i amerykańskie (które nazywane są też *opcjami waniliowymi*). Nie zawsze znajdują się one w obrocie giełdowym, są raczej opcjami na zamówienie (*over the counter options*).

1) **Niestandardowe opcje amerykańskie**. Przykład: zmodyfikowana amerykańska opcja kupna z ceną wykonania będącą funkcją deterministyczą $K : [0, T] \to \mathbb{R}$; wtedy wypłata takiej opcji: $X^a = (S_\tau - K_\tau)^+$.
2) **Opcje bermudzkie** (*Bermudan options*). Są to opcje, które mogą być realizowane tylko w pewne dni. Można je traktować jako specyficzny rodzaj opcji amerykańskich, dla których funkcja wypłaty $g(x, t) = 0$ dla tych chwil t, kiedy opcji nie możemy zrealizować.
3) **Opcje startujące w przyszłości** (*forward start options*). Niech $t_0 \in (0, T)$. W chwili t_0 jedna strona kontraktu otrzymuje opcję z terminem wygaśnięcia T i ceną wykonania S_{t_0} i płaci za to drugiej stronie w chwili zero. Wypłata wynosi $X = (S_T - S_{t_0})^+$.

4) **Opcje wyboru** (*chooser options, as-you-like-it options*). Opcja, której właściciel w określonej chwili t_0 w przyszłości ma prawo zdecydować czy chce, żeby była to opcja sprzedaży czy kupna (T i K są określone z góry w momencie sprzedaży opcji). Właściciel opcji w chwili t_0 wybiera opcję o większej wartości, stąd wartość tej opcji w chwili t_0 wynosi

$$\begin{aligned} Z &= \max\left(C(S_{t_0}, t_0, T, K), P(S_{t_0}, t_0, T, K)\right) \\ &= \max\left(C(S_{t_0}, t_0, T, K), C(S_{t_0}, t_0, T, K) + Ke^{-r(T-t_0)} - S_{t_0}\right) \\ &= C(S_{t_0}, t_0, T, K) + \max\left(0, Ke^{-r(T-t_0)} - S_{t_0}\right). \end{aligned}$$

5) **Opcje binarne/cyfrowe** (*binary options, digital options*). Są to opcje, których wypłata zależy w sposób nieciągły od ceny instrumentu pierwotnego S_T w momencie wykonania T.
   - Opcja **pieniądze albo nic** (*cash or nothing*). Wypłata X w chwili T:
     - dla opcji kupna: $X = Z\,\mathbf{1}_{\{S_T > K\}}$,
     - dla opcji sprzedaży: $X = Z\,\mathbf{1}_{\{S_T < K\}}$, gdzie stałe Z, K ustalone.
   - Opcja **walor albo nic** (*asset or nothing*). Wypłata X w chwili T:
     - dla opcji kupna: $X = S_T\,\mathbf{1}_{\{S_T > K\}}$,
     - dla opcji sprzedaży: $X = S_T\,\mathbf{1}_{\{S_T < K\}}$, gdzie stała K ustalona.

6) **Opcje zależne od trajektorii** (*path-dependent options*). Są to opcje, dla których funkcja wypłaty zależy od cen akcji w całym okresie trwania kontraktu $X = f(S.)$ (dla ustalonej ω trajektoria procesu $S.(\omega)$ jest funkcją ciągłą na $[0, T]$).

   a) **Opcje azjatyckie** (*Asian options*). Wypłata zależy od średniej ceny waloru w określonym okresie $[t_0, T]$. Są popularne na rynku, ponieważ
   - są tańsze od odpowiadających im standardowych opcji europejskich,
   - są użyteczne na rynkach o małej płynności (na rynkach o większym ryzyku),
   - średnia zabezpiecza przed manipulacją cenami blisko daty wygaśnięcia.

   Opcje azjatyckie dzielimy na

   ⋆ **I rodzaju** *(average value Asian option)* - o wypłatach:
   z opcji kupna: $X = (S_{sr} - K)^+$; sprzedaży: $X = (K - S_{sr})^+$,

   ⋆ **II rodzaju** *(average strike Asian option)* - o wypłatach:
   z opcji kupna: $X = (S_T - S_{sr})^+$; sprzedaży: $X = (S_{sr} - S_T)^+$.

   Sposoby obliczania średniej:

$$S_{sr} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S\left(\frac{i}{N}\right), \text{ } N \text{ - liczba dni handlu w roku } (N = 252),$$

$$S_{sr} = \frac{1}{T - t_0}\int_{t_0}^{T} S(t)dt,$$

$$S_{sr} = \exp\left(\frac{1}{T - t_0}\int_{t_0}^{T} lnS(t)dt\right).$$

b) **opcje typu lookback** (*lookback options*), z których dochód zależy od maksimum lub minimum ceny instrumentu podstawowego. Właściciel opcji:
- kupna ma zagwarantowane kupno waloru po najniższej cenie, po jakiej walor był sprzedawany w okresie $[0, T]$,
- sprzedaży sprzedaje walor po najwyższej cenie w okresie $[0, T]$.
Zatem wypłata z opcji kupna: $X = S_T - S_{min}$, sprzedaży: $X = S_{max} - S_T$.

7) **Opcje barierowe** (*barrier options*), zależne od trajektorii. Rodzaje:
- opcje wyjścia (*knock-out options*) - przestają istnieć, gdy cena waloru przekroczy pewną ustaloną wartość (barierę),
- opcje wejścia (*knock-in options*) - zaczynają istnieć, gdy cena waloru przekroczy barierę.

Standardowo wypłata z opcji barierowych jest wypłatą z opcji waniliowych, gdy zostanie spełniony warunek związany z barierą. Np. dla opcji kupna:
- Opcje, które zostają unieważnione, gdy cena waloru
  - spadnie poniżej bariery B (*down-and-out*), $X = (S_T - K)^+ \mathbf{1}_{\min_{\{t \le T} S_t \ge B\}}$,
  - przekroczy barierę B (*up-and-out*), $X = (S_T - K)^+ \mathbf{1}_{\max_{\{t \le T} S_t \le B\}}$.
- Opcje, które uzyskują ważność, gdy cena waloru
  - przekroczy barierę B (*up-and-in*), $X = (S_T - K)^+ \mathbf{1}_{\max_{\{t \le T} S_t \ge B\}}$
  - spadnie poniżej bariery B (*down-and-in*), $X = (S_T - K)^+ \mathbf{1}_{\min_{\{t \le T} S_t \le B\}}$.

8) **Opcje z nieliniowa wypłatą**. $X = (h(S_T) - K)^+$, gdzie h - dowolna nieliniowa funkcja np. opcja potęgowa z parametrem α, $h(x) = x^\alpha$, $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$.
9) **Opcje złożone**.
10) **Opcje kwantylowe**.
11) **Opcje koszykowe**.
12) ...

Więcej w książce: A. Weron, R. Weron, Inżynieria Finansowa, WNT, 1999.

Wycena opcji egzotycznych jest na ogół trudnym zadaniem, często otrzymuje się formuły niejawne. Czasem można znaleźć wzór analityczny, np. dla opcji potęgowej z parametrem α:

$$\Pi_0((S_T^\alpha - K)^+) = \exp\left[(\alpha - 1)\left(r + \frac{\alpha\sigma^2}{2}\right)T\right] C(S_0^\alpha, T, K, \alpha\sigma, r_\alpha),$$

$$r_\alpha = \alpha\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \frac{\alpha^2\sigma^2}{2}.$$

W przypadku opcji nieliniowej o skomplikowanej postaci funkcji h często stosuje się metody symulacyjne opierające się na mocnym prawie wielkich liczb. Zwykle takie wypłaty wycenia się za pomocą symulacji komputerowych i procedur numerycznych bazujących na przybliżaniu geometrycznego ruchu Browna przez model CRR.